NICOLAE DINCULEANU
conf. univ.

EUGEN RADU
conf. univ.

Elemente DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a REALĂ

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ – BUCUREŞTI, 1966

Petrescu Anca cl. XI-a A

NICOLAE DINCULEANU
Conf. univ.

EUGEN RADU
Conf. univ.

Elemente DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a REALĂ

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI — 1966

CUVÎNT INTRODUCTIV

În ultimele decenii, matematica a cunoscut o dezvoltare vertiginoasă, determinată, pe de o parte, de necesitatea lăuntrică a clarificării și sistematizării conceptelor și metodelor sale fundamentale, iar, pe de altă parte, de cuceririle celorlalte științe (în special ale fizicii) și ale tehnicii.

La rîndul său, această dezvoltare, marcată mai ales prin apariția unor noi domenii de cercetare matematică, s-a dovedit extrem de fructuoasă pentru știință și tehnică. Este suficient să amintim contribuția logicii matematice la studiul mecanismelor automate, a analizei funcționale la cercetarea celor mai complexe probleme de fizică și a teoriei informației la cibernetica tehnică.

Apariția de noi domenii ale matematicii a pus într-o lumină nouă cunoștințele din domeniile clasice ale acestei științe și a făcut necesară revizuirea și refundarea unor noțiuni de bază al căror conținut tradițional era depășit.

În ce privește analiza matematică — obiectul expunerii din manualul de față — evoluția conceptelor sale fundamentale s-a produs în mai multe etape, fiecare dintre acestea corespunzînd unui anumit stadiu de dezvoltare a matematicii și a științei în general.

Astfel, noțiunea de *funcție*, concepută inițial ca polinom, a fost apoi extinsă la clasa funcțiilor pe care astăzi le numim elementare, pentru ca mai tîrziu, o dată cu utilizarea pe scară largă a teoriei mulțimilor în matematică, această noțiune să fie definită într-un mod foarte general și simplu, ca o corespondență între elemente a două mulțimi oarecare.

Tot astfel, noțiunea de *limită*, concepută de Leibniz și Newton — genialii inițiatori ai calculului diferențial și integral — în mod intuitiv, dar neriguros, în legătură cu mărimile variabile, a fost apoi precizată de către Cauchy acum mai mult de o sută de ani, care a reușit să surprindă ceea ce era esențial în noțiunea intuitivă de limită. O dată cu introducerea topologiei ca instrument de cercetare matematică, noțiunea de limită a fost adaptată la cele mai generale spații topologice.

Noțiunile de *derivată* și de *integrală* au suferit de asemenea prefaceri substanțiale. Este suficient să amintim extensiunile integralei date de Riemann, Lebesgue și alții și de extensiunea derivatei de la funcțiile obișnuite la funcțiile de mulțime (măsuri).

* * *

În lumina celor de mai sus rezultă că a devenit necesară punerea pe baze noi a unora dintre cunoștințele de matematică predate în învățămîntul de cultură generală. Trebuie recunoscut deschis că o astfel de înnoire implică în mod necesar renunțarea curajoasă la multe obișnuințe și învingerea rutinei, în interesul pregătirii temeinice a viitoarelor cadre pentru construirea societății noi, socialiste.

În această ordine de idei este cu totul îmbucurător faptul că programa școlară de *Analiză matematică pentru clasa a XI-a reală*, aprobată în anul 1959 de Ministerul Învățămîntului și Culturii, vădește preocuparea de adaptare la stadiul actual al acestei discipline a matematicii. Călăuzit de această preocupare, ministerul a solicitat sprijinul catedrei de calcul diferențial și integral de la Facultatea de matematică și fizică din București, iar academicianul Miron Nicolescu, șeful catedrei, ne-a încredințat elaborarea acestui manual.

Ordinea de expunere indicată în programa şcolară ne-a permis introducerea unor elemente de modernizare ca, de exemplu, cîteva noţiuni sumare despre teoria mulţimilor (care, de altfel, ar putea fi introduse cu succes încă din clasele anterioare) limbajul vecinătăţilor, studiul limitelor de şiruri ca preambul la studiul limitelor de funcţii, eliminarea unor notaţii care se pretează la confuzii etc.

Trebuie subliniat faptul important că introducerea elementelor de modernizare nu numai că *nu* îngreuiază înţelegerea expunerii, dar, dimpotrivă, o simplifică în mod apreciabil. În acelaşi timp, nu mai este necesar ca în învăţămîntul superior să fie revizuite cunoştinţele dobîndite de elevi în liceu, ci doar ca ele să fie aprofundate şi completate.

* * *

Probabil că cea mai de seamă dificultate pe care o întîmpină începătorul atunci cînd abordează analiza matematică o constituie noutatea tipurilor de concepte şi de raţionamente care intervin în această disciplină, în comparaţie cu acelea definite şi utilizate în algebră şi geometrie.

Tocmai aprecierea acestui fapt ne-a determinat să ne concentrăm în mod permanent atenţia asupra căilor de urmat, pentru ca expunerea — rămînînd corectă din punct de vedere ştiinţific — să nu comporte, totuşi, prea mari dificultăţi de înţelegere. În acest sens, folosind experienţa bogată a şcolii româneşti de analiză matematică, ne-am decis să tratăm limitele de funcţii cu ajutorul limitelor de şiruri, iar pe acestea din urmă cu ajutorul vecinătăţilor, considerînd că astfel sînt posibile definiţii şi raţionamente mai apropiate de intuiţie, decît acelea utilizate de clasica „analiză prin ε" (ε a fost aproape complet eliminat). În acelaşi timp, am evitat acel gen de pseudodemonstraţii, atît de frecvente în unele manuale din trecut, preferind să substituim demonstraţiile dificile sau a căror prezenţă ar fi afectat economia expunerii cu *justificări* intuitive, atrăgînd însă atenţia că modelul intuitiv *sugerează* doar faptul matematic, fără a-l demonstra. În alte cazuri, am dat demonstraţii cu literă mică, rămînînd ca profesorul să decidă — în funcţie de nivelul clasei şi propria planificare — dacă să le parcurgă sau nu cu elevii.

Am încercat să facem cît mai accesibilă expunerea şi să realizăm fixarea şi adîncirea cunoştinţelor, inserînd în text numeroase exemple şi aplicaţii tratate complet.

Pentru a completa unele chestiuni, ca şi pentru a preîntîmpina eventuale neînţelegeri şi confuzii, ori de cîte ori a fost necesar am adăugat observaţii — menţionate ca atare în mod explicit.

Observaţiile şi exemplele mai importante figurează cu literă mare, iar acelea care constituie în mod strict un auxiliar pentru înţelegerea expunerii — cu literă mică.

La fiecare capitol am propus pentru rezolvare numeroase exerciţii, dispuse în ordinea de expunere a capitolului respectiv. Tratarea lor este uşurată de prezenţa, la sfîrşitul manualului, a unei anexe speciale de indicaţii şi răspunsuri.

* * *

Conceperea şi redactarea unui manual de analiză matematică pentru liceu implică mari dificultăţi, pe care, fără îndoială, nu am fi izbutit să le învingem singuri.

Ţinem să aducem mulţumirile noastre în primul rînd prof. acad. Octav Onicescu, acad. Miron Nicolescu şi prof. Mihai Neculce, care, pe lîngă multe observaţii preţioase făcute asupra manualului, au contribuit la formaţia noastră matematică.

În ţara noastră, modul modern de prezentare a analizei matematice, adoptat în acest manual, a fost introdus, adaptat şi prelucrat de acad. Miron Nicolescu.

Acad. Miron Nicolescu a urmărit îndeaproape elaborarea prezentului manual, fiind în acelaşi timp şi referent ştiinţific. Îi datorăm de asemenea nota istorică de la sfîrşitul manualului.

Tuturor le exprimăm pe această cale mulţumirile noastre.

Autorii

CAPITOLUL I

NUMERE

§ 1. NUMERE REALE

1. Numere întregi, numere raționale, numere reale

a. *Numerele naturale* sînt : 1, 2, 3, 4, ..., n, ... Totalitatea (sau *mulțimea*) acestor numere se notează cu litera N. Cu numerele naturale se pot efectua două operații, care conduc tot la numere naturale : adunarea și înmulțirea; suma $m + n$ și produsul $m \cdot n$ a două numere naturale sînt de asemenea numere naturale.

Se poate efectua și operația de scădere $m - n$, dacă $m > n$, și rezultatul este tot un număr natural. Dacă $m \leqslant n$, operația de scădere nu se mai poate efectua în cadrul numerelor naturale. Pentru a extinde operația de scădere și la acest caz, se introduc și alte numere.

b. *Numărul* 0. Pentru a putea efectua operația de scădere $m - n$, în cazul cînd $m = n$, se introduce numărul 0, $m - n = 0$. Numărul 0 are efect nul în adunare, în sensul că, adunat cu orice număr natural n, îl lasă neschimbat : $n + 0 = n$. Numărul 0 are de asemenea proprietatea că, înmulțindu-l cu orice număr natural n, se obține 0, $0 \cdot n = 0$.

Se observă că, în mulțimea formată din numerele naturale și 0, adunarea și înmulțirea ne conduc la numere care fac parte tot din această mulțime.

c. *Numerele întregi.* Pentru a putea efectua scăderea $m - n$ în cazul cînd $m < n$, se introduc numerele -1, -2, -3, ..., $-n$, ...

Mulțimea *numerelor întregi* este formată din numerele ..., $-n$, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ... Cu numerele întregi se pot efectua trei operații, care conduc tot la numere întregi : adunarea, scăderea și înmulțirea.

Cu numerele întregi (în particular cu numerele naturale) se poate efectua de asemenea operația de împărțire *, $m : n$; dacă m este multiplu al unui număr întreg n *diferit de* 0, rezultatul împărțirii $m : n$ este tot un număr întreg. Dacă, însă, m nu este un multiplu al lui n, împărțirea nu se mai poate efectua în cadrul numerelor întregi. Operația de împărțire se poate extinde și la acest caz, introducînd și alte numere.

d. *Numerele raționale* se pot scrie sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, unde m și n sînt numere întregi, iar n *diferit de* 0. Orice număr întreg m poate fi scris ca fracție sub forma $\frac{m}{1}$, deci printre numerele raționale se află toate numerele întregi.

Un număr rațional se poate scrie sub formă de fracție în mai multe moduri: $\frac{m}{n}, \frac{-m}{-n}, \frac{2m}{2n}, \frac{-2m}{-2n}, \dots, \frac{km}{kn}, \dots$ Toate aceste fracții reprezintă *același* număr rațional. Dacă m și n sînt prime între ele (adică dacă nici un număr natural, în afară de 1, nu este divizor comun al lui m și n), fracția $\frac{m}{n}$ se numește *ireductibilă*. Orice număr rațional se poate scrie într-un singur mod ca fracție ireductibilă cu numitorul natural.

Cu numerele raționale se pot efectua operațiile de adunare, scădere și înmulțire și rezultatul este tot un număr rațional. De asemenea, în cadrul mulțimii numerelor raționale se poate efectua și operația de împărțire cu un număr *diferit de* 0, adică prin împărțirea unui număr rațional r cu un număr rațional s *diferit de* 0 se obține tot un număr rațional.

e. *Numerele reale.* Numerele raționale se pot reprezenta și sub formă de fracție zecimală:

$$a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

unde a_0 este partea întreagă, iar $0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ este partea zecimală. Partea zecimală poate să fie finită, sau infinită și periodică (simplă sau mixtă).

Exemple: $\frac{23}{125} = 0{,}184$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545\dots$; $\frac{44}{30} = 1{,}4666\dots$

Fracțiile zecimale cu partea zecimală infinită și *neperiodică* reprezintă *numerele iraționale.*

Exemple: $0{,}101001000100001\dots$; $\sqrt{2} = 1{,}4142\dots$; $\pi = 3{,}1415926536\dots$

* A împărți *exact* numărul întreg m la numărul întreg n înseamnă a găsi un număr întreg p, și *numai unul*, astfel încît $m = np$. (Se spune că m este un multiplu al lui n.) Dacă $n=0$ și $m \neq 0$, egalitatea precedentă nu este verificată de *nici un* număr întreg p; dacă $n = 0$ și $m=0$, egalitatea precedentă este verificată de *orice* număr întreg p. Rezultă că dacă $n = 0$, împărțirea nu se poate efectua.

Atît numerele raţionale, cît şi numerele iraţionale se numesc *numere reale*. Mulţimea numerelor reale se notează cu litera R.

Cu numerele reale se pot efectua, ca şi cu numerele raţionale, toate cele patru operaţii: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea (printr-un număr diferit de 0), rezultatul este tot un număr real.

În loc de *număr real*, se spune, mai simplu *număr*.

Numărul $-y$ se numeşte *opusul* numărului y. Opusul lui 0 este tot 0. A scădea din x pe y înseamnă a aduna pe x cu $-y$:

$$x - y = x + (-y).$$

Operaţia de scădere se reduce astfel la cea de adunare.

Dacă $y \neq 0$ numărul $\frac{1}{y}$ se numeşte *inversul* numărului y şi se mai notează y^{-1}. Inversul lui 1 este 1, iar inversul lui -1 este -1. A împărţi pe x la y înseamnă a înmulţi pe x cu $\frac{1}{y}$:

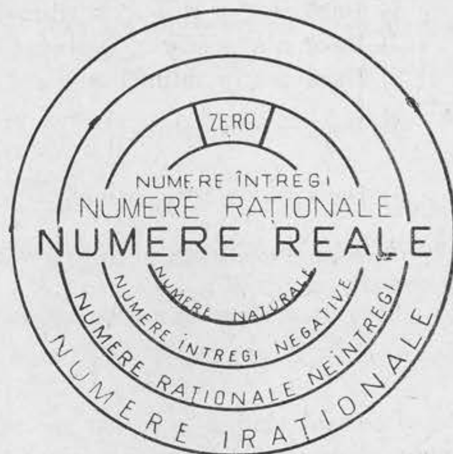


Fig 1.

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Operaţia de împărţire cu un număr *diferit de* 0 se reduce astfel la înmulţirea cu inversul acestuia.

Singurul număr care nu are invers este numărul 0, deoarece împărţirea $\frac{1}{0}$ nu se poate efectua (nu are sens).

În figura 1 se prezintă schematic diferitele mulţimi de numere considerate mai sus.

2. Relaţia de ordine

Oricare ar fi numerele x şi y, avem una, şi numai una, din următoarele trei posibilităţi: sau $x < y$ (x este mai mic decît y), sau $x = y$ (x este egal cu y), sau $x > y$ (x este mai mare decît y).

Dacă x *nu* este mai mare decît y, atunci x poate fi mai mic decît y sau egal cu y şi se scrie $x \leqslant y$ (x este mai mic sau egal cu y). De asemenea, dacă x *nu* este mai mic decît y, atunci x poate fi mai mare decît y sau egal

cu y şi se scrie $x \geqslant y$ (x este mai mare sau egal cu y). Rezultă că avem: $x \leqslant y$, dacă are loc una din relaţiile: $x = y$ sau $x < y$.

Aşadar, între numerele reale există o *relaţie de ordine*. Se spune că *mulţimea numerelor reale este ordonată* după mărimea numerelor.

Dăm cîteva proprietăţi mai importante ale relaţiei de ordine:

1) Dacă $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$, atunci $x = y$.

2) Dacă $x \leqslant y$ şi $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$ (relaţia de ordine este tranzitivă).

3) Dacă $x \leqslant y$, atunci $x + z \leqslant y + z$, oricare ar fi z.

4) Dacă $x \leqslant y$, atunci $\begin{cases} xz \leqslant yz, \text{ oricare ar fi } z \geqslant 0, \\ xz \geqslant yz, \text{ oricare ar fi } z \leqslant 0. \end{cases}$

5) Dacă $0 < x \leqslant y$, atunci $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.

Observaţii. Proprietăţile 2), 3), 4) şi 5) sînt adevărate şi dacă se înlocuiesc semnele $\leqslant$ şi $\geqslant$ respectiv cu $<$ şi $>$.

Proprietatea 5) nu mai este general adevărată dacă unul din numerele x şi y este < 0, de exemplu $-2 < 3$, dar $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$. Dacă însă $x \leqslant y < 0$, avem de asemenea $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.

În cazul cînd $x \geqslant 0$, dar nu se precizează dacă $x = 0$ sau $x > 0$, se spune că x este un număr *pozitiv*. Dacă x este pozitiv şi se precizează că $x > 0$, se spune că x este un număr *strict pozitiv*. În mod analog se definesc numerele *negative* ($x \leqslant 0$) şi cele *strict negative* ($x < 0$) *.

3. Modulul

Modulul sau *valoarea absolută* a unui număr x se notează $|x|$ şi se defineşte astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0; \\ 0, \text{ dacă } x = 0; \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Exemple: $|7| = 7$; $|0{,}5| = 0{,}5$; $|-3| = 3$; $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Modulul are următoarele proprietăţi:

1) $|x| \geqslant 0$, oricare ar fi x; dacă $x = 0$, atunci $|x| = 0$, şi reciproc, dacă $|x| = 0$, atunci $x = 0$; rezultă că $x \neq 0$ dacă, şi numai dacă, $|x| > 0$.

2) $|-x| = |x|$.

* Rezultă că numărul 0 este şi negativ şi pozitiv. Acest fapt, care pare neobişnuit, este o consecinţă a terminologiei adoptate mai sus, care, însă, este necesară în capitolele următoare.

3) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$; $|x-y| \leqslant |x|+|y|$.
(Modulul sumei sau modulul diferenței este mai mic sau egal cu suma modulelor.)

Exemple: $|-8+3| < |-8|+|3|$; $|12-7| < |12|+|7|$.

4) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$; $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$.
(Modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal cu modulul diferenței, sau cu modulul sumei.)

Exemple: $||-3|-|-5|| = |-3-(-5)|$;
$||-3|-|5|| < |-3+(-5)|$.

5) $|xy| = |x|\,|y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$.

(Modulul produsului este egal cu produsul modulelor; modulul cîtului este egal cu cîtul modulelor.)

6) Dacă $|x| \leqslant c$, atunci $-c \leqslant x \leqslant c$ și reciproc, dacă $-c \leqslant x \leqslant c$, atunci $|x| \leqslant c$.

Exemplu: $|-3| < 7$ este echivalent cu $-7 < -3 < 7$.

Proprietățile 1) și 2) sînt evidente.

Pentru demonstrarea primei părți a proprietății 3), se consideră succesiv cele patru cazuri posibile: $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ și $y \leqslant 0$, $x \leqslant 0$ și $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$ și $y \leqslant 0$.

De exemplu, să considerăm $x \geqslant 0$ și $y \leqslant 0$; atunci $|x| = x$ și $|y| = -y$; dacă $x+y \geqslant 0$, atunci $|x+y| = x+y \leqslant x = |x| \leqslant |x|+|y|$; dacă $x+y \leqslant 0$, atunci $|x+y| = -x-y = -x+|y| \leqslant |y| \leqslant |x|+|y|$.

În cazul cînd $x \leqslant 0$ și $y \geqslant 0$, se procedează în mod analog. În cazul cînd x și y sînt ambele pozitive sau ambele negative, prima parte a proprietății 3) este verificată cu egalitate.

Partea a doua a proprietății 3) se deduce apoi imediat, astfel:

$$|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x|+|-y| = |x|+|y|.$$

Pentru demonstrarea primei părți a proprietății 4) se aplică proprietatea 3) numerelor $x-y$ și y, apoi numerelor $y-x$ și x:

$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y|+|y|,$$

deci:

$$|x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

În mod analog:

$$|y| = |y-x+x| \leqslant |y-x|+|x|,$$

deci:

$$|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|.$$

Deoarece $||x|-|y||$ este egal cu unul din numerele $|x|-|y|$ sau $|y|-|x|$, rezultă:

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|.$$

Pentru demonstrarea părţii a doua a proprietăţii 4) se aplică proprietatea 3) mai întîi numerelor $x + y$ şi $-y$, apoi numerelor $y + x$ şi $-x$.

Proprietatea 5) este imediată.

Pentru demonstrarea proprietăţii 6) se procedează astfel:

Să presupunem că $|x| \leqslant c$. Atunci $x \leqslant c$. Dacă am avea $x < -c$, atunci $-x > c$ de unde $|x| > c$, ceea ce ar contrazice ipoteza. Aşadar, $-c \leqslant x \leqslant c$.

Reciproc, să presupunem că $-c \leqslant x \leqslant c$. Dacă x este pozitiv, atunci $|x| = x$, deci: $|x| \leqslant c$. Dacă x este negativ, atunci $|x| = -x$ este pozitiv şi $-x \leqslant c$, de unde de asemenea $|x| \leqslant c$.

4. Reprezentarea numerelor prin puncte pe o dreaptă

În geometria analitică se arată că numerele reale pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu punctele unei drepte (d), pe care s-a fixat un punct O (originea), un sens pozitiv şi o unitate de lungime.

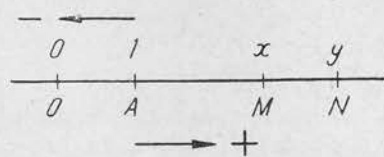


Fig 2

Dacă, în această corespondenţă, M este punctul care corespunde numărului x, numărul x se numeşte *abscisa* punctului M (fig. 2). Dacă M şi N sînt două puncte ale dreptei, de abscise respectiv x şi y, distanţa dintre M şi N este egală cu modulul diferenţei absciselor $|x - y|$.

Dată fiind corespondenţa biunivocă dintre numerele reale şi punctele unei drepte, se *identifică* un punct M cu abscisa sa x. De aceea se poate spune „punctul x", înţelegînd prin aceasta „punctul care are abscisa x". De exemplu, se poate spune: punctul 0, punctul -2, punctul $\frac{3}{4}$ etc.

§ 2. PUTERI ÎNTREGI ŞI RAŢIONALE

1. Puteri naturale

Dacă a este un număr *real* şi n un număr *natural*, se notează cu a^n produsul a n factori egali cu a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

Numărul a^n se numeşte *puterea a n-a a lui a;* numărul a este *baza* puterii, iar n este *exponentul* puterii. Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale.*

Regulile operaţiilor cu puterile naturale sînt cunoscute din clasele precedente; de aceea nu le mai dăm aici.

O inegalitate importantă relativă la puterile naturale, cu numeroase aplicaţii în analiza matematică, este *inegalitatea lui Bernoulli*:

Dacă $a \geqslant 0$, *atunci, oricare ar fi numărul natural* n, *are loc inegalitatea:*

$$\boxed{(1 + a)^n \geqslant 1 + na}$$

Într-adevăr, dezvoltînd $(1 + a)^n$ după formula binomului lui Newton, obţinem:

$$(1 + a)^n = 1 + C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \ldots + a^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \ldots + \\ + a^n \geqslant 1 + na.$$

Aplicaţii. 1) *Dacă* $a \geqslant 2$, *atunci, oricare ar fi numărul natural* n, *are loc inegalitatea:*

$$\boxed{a^n \geqslant n + 1}$$

Într-adevăr, să notăm $A = a - 1$; deci $A \geqslant 1$ şi $a = A + 1$. Atunci:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA \geqslant 1 + n.$$

Exemple: $2n \geqslant n + 1$ pentru orice n natural; $10^n \geqslant n + 1$ pentru orice n natural; $\pi^n \geqslant n+1$ pentru orice n natural. Rezultă că: $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$; $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$ etc.

2) *Dacă* $a > 1$, *atunci, oricare ar fi numărul real* α, *se poate găsi un număr natural* n, *astfel încît*

$$a^n > \alpha.$$

Să notăm $A = a - 1$; deci $A > 0$ şi $a = A + 1$. Se poate găsi un număr natural n, astfel că $nA > \alpha$. Atunci:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA > 1 + \alpha > \alpha.$$

Exemplu: $a = \frac{3}{2}$, $\alpha = 10^5$; rezultă $A = \frac{1}{2}$. Luînd, de exemplu, $n = 10^6$, se obţine $nA = 5 \cdot 10^5 > 10^5$, deci: $\left(\frac{3}{2}\right)^{10^6} > 10^5$.

2. Puteri întregi

Puterea cu exponent 0 a unui număr $a \neq 0$ este prin definiție:

$$a^0 = 1.$$

Puterea 0^0 nu are sens *.

Puterea cu exponent *negativ* a unui număr $a \neq 0$ este prin definiție:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (} n \text{ natural).}$$

Puterea 0^{-n} nu are sens, oricare ar fi n natural, deoarece $0^n = 0$ și împărțirea cu 0 nu are sens.

Puterile a^k cu exponent k întreg se numesc *puteri întregi.*

Calculul cu puterile întregi se face după aceleași reguli ca și calculul cu puterile naturale.

Trebuie reținut că puterea 0^k are sens numai pentru exponent k natural.

3. Radicali

Să considerăm ecuația:

$$x^n = a \ (a \geqslant 0, \ n \text{ natural}).$$

Această ecuație are *cel mult* o soluție *pozitivă*. Într-adevăr, dacă x_1 și x_2 ar fi două soluții pozitive diferite ale acestei ecuații ($x_1^n = a$, $x_2^n = a$), și, dacă de exemplu, $x_1 < x_2$, atunci $x_1^n < x_2^n$, ceea ce este în contradicție cu egalitatea $x_1^n = x_2^n = a$.

Din acest raționament nu rezultă că ecuația precedentă are o soluție (pozitivă). Existența unei astfel de soluții se poate stabili în mod riguros; demonstrația acestui fapt depășește, însă, cadrul manualului.

Soluția *pozitivă — unică* — a ecuației precedente se scrie, simbolic, astfel:

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \ (a \geqslant 0, \ n \text{ natural})$$

și se numește *radical de ordinul n din a* (sau radical indice n din a).

---

* Asupra acestei chestiuni se va reveni la capitolul V.

Regulile operațiilor cu radicali sînt cunoscute. Reamintim doar regula următoare:

$$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a} \ (a \geqslant 0,\ n \text{ și } p \text{ numere naturale}).$$

Observații. 1° Dacă $a < 0$, ecuația $x^{2n} = a$ nu are nici o soluție (reală), deoarece $x^{2n} \geqslant 0$; iar ecuația $x^{2n+1} = a$ are o soluție *negativă*, care se poate nota și în acest caz $\sqrt[2n+1]{a}$. De exemplu, ecuația $x^3 = -27$ are soluția negativă $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Regula specificată mai sus nu mai este, în general, adevărată pentru radicalii numerelor negative. De exemplu, $\sqrt[3]{-1} = -1$, dar $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$.

2° Avem $\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi x. De exemplu, $\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$.

4. Puteri raționale

Fie $a > 0$ și $r = \frac{m}{n}$ un număr rațional; putem considera că numitorul n este număr natural, amplificînd la nevoie cu -1.

Puterea lui a cu exponentul rațional r este prin definiție

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

și nu depinde de modul în care r este scris ca fracție (cu numitorul număr natural). Într-adevăr, dacă se scrie $r = \frac{mp}{np}$ (p natural), atunci $a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, deoarece $a > 0$.

Puterile cu exponent rațional se numesc *puteri raționale*.

Calculul cu puterile raționale se face după aceleași reguli ca și calculul cu puteri întregi.

Observații. 1° Dacă r este *strict pozitiv*, atunci $r = \frac{m}{n}$, cu m și n numere naturale; în acest caz, $0^r = \sqrt[n]{0^m} = 0$.

2° Puterile raționale nu au sens dacă baza este strict negativă, $a < 0$, deoarece, în acest caz, egalitatea $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ nu mai este în general adevărată.

EXERCIŢII

Fie a şi b două numere strict pozitive. Se ştie că media armonică, media geometrică şi media aritmetică a acestor numere sînt respectiv:

$$m_{arm} = \frac{2ab}{a+b}, \quad m_g = \sqrt{ab}, \quad m_{arit} = \frac{a+b}{2}.$$

Să se demonstreze inegalităţile:

1. $m_{arm} \leqslant m_g \leqslant m_{arit}$.
2. $m_{arit} - m_g \geqslant m_g - m_{arm}$.

3. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele pozitive a, b, c, are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

4. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele strict pozitive a, b, c, are loc inegalitatea:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6\,abc.$$

Cu notaţiile de la exerciţiul 1) să se demonstreze că, dacă $0 < a < b$, au loc inegalităţile:

5. $m_{arit} - m_{arm} \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4a}$.

6. $m_{arit} - m_g \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8a}$.

7. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale a_1, a_2, b_1, b_2, are loc inegalitatea (Cauchy-Buniakovski):

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Să se generalizeze.

8. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a, b, c, r, s, t, are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{r}{a} + \frac{s}{b} + \frac{t}{c}\right)\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{s} + \frac{c}{t}\right) \geqslant 9.$$

9. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, are loc inegalitatea (Minkovski):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

10. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale a şi b $(a \neq b)$, au loc egalităţile :

$$\frac{a + b + |b - a|}{2} = \max.(a, b)$$

şi

$$\frac{a + b - |b - a|}{2} = \min.(a, b),$$

unde max. (a, b) şi min. (a, b) sînt — respectiv — cel mai mare şi cel mai mic dintre numerele a şi b.

Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul real a, au loc inegalităţile :

11. $\left|a + \frac{1}{a}\right| > 1 \; (a \neq 0)$.

12. $\left|\frac{2a - 1}{a^2 + 1}\right| < 2$.

Să se rezolve ecuaţiile :

13. $3|x| - 5 = 1 - 7|x|$.

14. $\frac{|x| + 2}{2} = 3|x| + 1$.

15. $|x| - 2 = 5|x| - 1$.

16. $-5|x| + 8 = 7 - 3x$.

17. $3|x| + 1 = 5x - 2$.

18. $5|x| + 1 = 2x - 3$.

Să se discute, în raport cu valorile lui a, b, c, ecuaţiile :

19. $a|x| = b$.

20. $a|x| + bx = c$.

21. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n şi numerele reale a şi b supuse condiţiilor $0 < a < 1 < b < 2$, are loc inegalitatea :

$$2a^n b^n + 1 < 2^{n+1} + 1.$$

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n şi numărul real a, $0 < a < 1$, are loc inegalitatea :

$$1 - a^n \leqslant n(1 - a).$$

CAPITOLUL II

NOȚIUNI ELEMENTARE DESPRE MULȚIMI

§ 1. MULȚIMI, OPERAȚII CU MULȚIMI

1. Exemple de mulțimi

Noțiunea de mulțime este o noțiune *primară*, adică nu se poate defini cu ajutorul altor noțiuni mai simple. De aceea se precizează înțelesul acestei noțiuni prin cîteva exemple de mulțimi concrete:

1) Mulțimea oamenilor de pe glob.

2) Mulțimea cărților dintr-o bibliotecă.

3) Mulțimea elevilor dintr-o clasă.

4) Mulțimea numerelor reale, R.

5) Mulțimea numerelor naturale, N.

6) Mulțimea literelor din alfabetul latin.

7) Mulțimea teoremelor dintr-o carte de matematică.

8) Orice loc geometric. De exemplu: mulțimea punctelor din plan (sau din spațiu) egal depărtate de un punct fix.

9) Mulțimea formată din numerele -3, 0, 5, 2.

10) Mulțimea formată numai din numărul 7.

Mulțimile sînt formate din obiecte de orice fel, fie obiecte fizice, fie obiecte ale gîndirii. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc *elementele* mulțimii. Elementele unei mulțimi sînt diferite unele de altele. De exemplu, cărțile dintr-o bibliotecă diferă fie prin conținut, fie prin format, fie prin faptul că nu ocupă același loc în spațiu.

Din exemplele de mai sus se vede că o mulțime se dă sau se definește în două moduri: fie prin specificarea unei proprietăți pe care o au toate

elementele mulţimii şi pe care nu o au alte obiecte (ca în exemplele 1—8), fie prin enumerarea elementelor mulţimii (ca în exemplele 9 şi 10). În acest din urmă caz, mulţimea se notează scriind între acolade elementele sale. Astfel, mulţimea formată din numerele $-3, 0, 5, 2$ se scrie $\{-3, 0, 5, 2\}$, iar mulţimea formată numai din numărul 7 se scrie $\{7\}$.

2. Apartenenţă

Mulţimile se notează, de obicei, cu litere mari, iar elementele cu litere mici (ale alfabetului latin sau ale altor alfabete).

Dacă a este un element al unei mulţimi M, se spune că „*a aparţine* mulţimii M" şi se scrie $a \in M$. Semnul „$\in$" se numeşte *semn de apartenenţă*. Dacă b nu este element al mulţimii M, se scrie $b \notin M$ (b nu aparţine lui M).

Exemple: $-3 \in \{-3, 0, 5, 2\}$, $0 \in \{-3, 0, 5, 2\}$, $2 \in \{-3, 0, 5, 2\}$, dar $8 \notin \{-3, 0, 5, 2\}$, $1 \notin \{-3, 0, 5, 2\}$. De asemenea, $7 \in \{7\}$, dar $5 \notin \{7\}$.

Pentru orice număr natural n putem scrie $n \in N$ şi pentru orice număr real x putem scrie $x \in R$. De exemplu, $1 \in N$, $2 \in N$, $3 \in N$, dar $0 \notin N$, $-1 \notin N$, $-2 \notin N$ etc.

De asemenea, $-2 \in R$, $0 \in R$, $3 \in R$, $-\frac{2}{7} \in R$, $\sqrt{2} \in R$, $\pi \in R$ etc.

3. Incluziune

Fie A şi B două mulţimi. Dacă orice element al lui A este şi element al lui B, se spune că „*A este conţinută în B*" sau „*A este inclusă în B*" şi se scrie $A \subset B$. Se mai spune că A este o *parte* sau o *submulţime* a lui B. Semnul „$\subset$" se numeşte *semn de incluziune*. Se mai spune că B *conţine* pe A sau că B *include* pe A şi se scrie $B \supset A$.

Exemple: $\{0,2\} \subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{2\} \subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-3, 5\} \subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-3, 0, 5, 2\} \subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-3, 0, 5, 2\} \supset \{-3, 2\}$; $\{-3, 0, 5, 2\} \supset \{0\}$ etc.

De asemenea $N \subset R$ sau $R \supset N$. Mulţimea A a punctelor unui cerc este inclusă în mulţimea B a tuturor punctelor din plan (fig. 3).

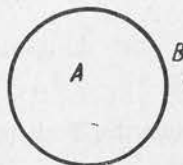


Fig. 3

Orice mulţime este inclusă în ea însăşi, $A \subset A$.

Dacă o mulţime A nu este inclusă într-o mulţime B, se scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$.

Astfel: $\{7\} \not\subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-3, 8\} \not\subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-1, 1\} \not\subset \{-3, 0, 5, 2\}$; $\{-3, 1, 0, 5, 2\} \not\subset \{-3, 0, 5, 2\}$ etc. în figura 4, $A \not\subset B$.

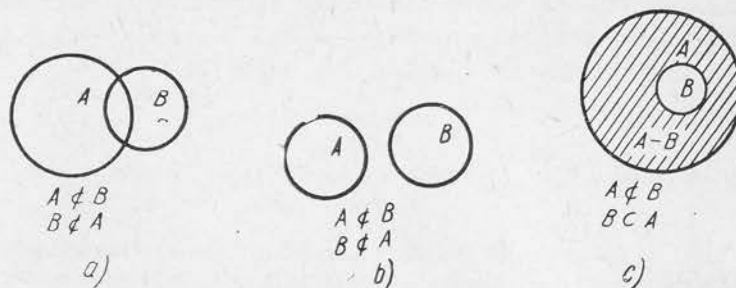


Fig. 4

Dacă $B \subset A$, mulţimea punctelor din A care nu aparţin lui B se notează $A - B$. În figura 4, *c*, $A - B$ este partea haşurată. $R - \{-1, 2\}$ este mulţimea numerelor reale, cu excepţia lui -1 şi 2.

4. Reuniune

Fie A şi B două mulţimi. Mulţimea *tuturor* elementelor lui A şi ale lui B la un loc se numeşte *reuniunea* mulţimilor A şi B şi se notează $A \cup B$. Semnul „$\cup$" se numeşte *semn de reuniune* şi seamănă cu litera U, iniţiala cuvîntului „Uniune". $A \cup B$ se citeşte „*A reunit* cu *B*" (fig. 5).

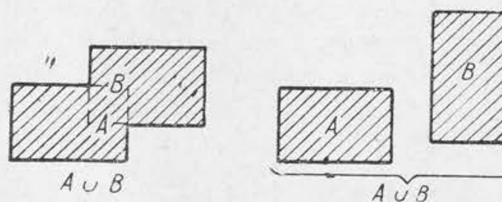


Fig. 5

Exemple: $\{1, 2, 5\} \cup \{1, 3, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$;
$\{1, 2\} \cup \{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$;
$\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ etc.
Reuniunea mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale este mulţimea R a numerelor reale (fig. 1).

Se vede uşor că, dacă $A \subset B$, atunci $A \cup B = B$.

Se defineşte în mod asemănător reuniunea mai multor mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ca fiind mulţimea tuturor elementelor ce aparţin cel puţin uneia din mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$; se notează $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sau $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Exemple: $\{-1, 2, 5\} \cup \{-1, -3, \pi\} \cup \{2, \sqrt{2}, 0\} = \{-3, -1, 0, \sqrt{2}, 2, \pi, 5\}$.

5. Intersecţie

Fie A şi B două mulţimi. Mulţimea *tuturor* elementelor *comune* celor două mulţimi se numeşte *intersecţia* mulţimilor A şi B şi se notează $A \cap B$ (se citeşte A intersectat cu B) (fig. 6, a). Dacă A şi B nu au nici un element comun, se spune că intersecţia lor este mulţimea vidă care se notează $\varnothing$: $A \cap B = \varnothing$. În acest caz, se spune că mulţimile A şi B sînt *disjuncte* (fig. 6, b).

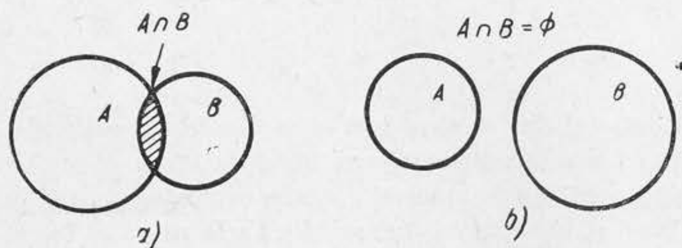


Fig. 6

Exemple: $\{1, 2, 5\} \cap \{0, 2, 4\} = \{2\}$; $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing$
$\{1, 2\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2\}$.
Intersecţia mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale este vidă.

Se vede uşor că, dacă $A \subset B$, atunci $A \cap B = A$.

Se defineşte în mod asemănător intersecţia mai multor mulţimi, $A_1, A_2, ..., A_n$, ca fiind mulţimea tuturor elementelor comune tuturor acestor mulţimi şi se notează $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, sau $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Exemple: $\{1, 2, 3\} \cap \{-1, 0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2, \pi, 5\} = \{1, 2\}$.

§ 2. MULŢIMI DE PUNCTE PE O DREAPTĂ

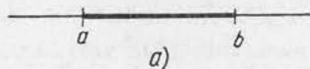
1. Intervale

În manualul de faţă interesează în mod special mulţimile de numere reale sau, ceea ce este acelaşi lucru, mulţimile de puncte de pe o dreaptă. Se întrebuinţează denumirile şi notaţiile de mai jos.

Fie a şi b două numere, $a < b$.

1) Mulţimea tuturor numerelor x cuprinse între a şi b $(a < x < b)$ se numeşte *interval deschis* şi se notează (a, b) (fig. 7, a).

2) Mulţimea tuturor numerelor x cuprinse între a şi b inclusiv a şi b, $(a \leqslant x \leqslant b)$, se numeşte *interval închis* sau *segment* şi se notează $[a, b]$ (fig. 7, b).



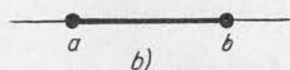
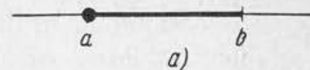


Fig. 7



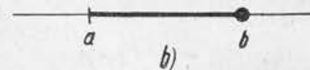
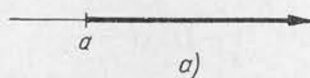


Fig. 8

3) Mulţimea tuturor numerelor x care verifică inegalităţile $a \leqslant x < b$ se notează $[a, b)$ şi se numeşte *interval închis la stînga* şi *deschis la dreapta* (fig. 8, a). Mulţimea tuturor numerelor x care verifică inegalităţile $a < x \leqslant b$ se notează $(a, b]$ şi se numeşte *interval deschis la stînga* şi *închis la dreapta* (fig. 8, b).

Intervalele definite mai sus se numesc *intervale mărginite*. Punctele a şi b se numesc *extremităţile* intervalului. Dacă $a = b$, atunci $[a, a] = \{a\}$ şi $(a, a) = \emptyset$.

4) Mulţimea tuturor numerelor x mai mari decît a (deci care verifică inegalitatea $a < x$) se notează * $(a, +\infty)$ şi se numeşte *semidreaptă deschisă (nemărginită la dreapta)* (fig. 9, a). Mulţimea tuturor numerelor x mai mari sau egale cu a (deci care verifică inegalitatea $a \leqslant x$) se notează $[a, +\infty)$ şi se numeşte *semidreaptă închisă (nemărginită la dreapta)* (fig. 9, b).



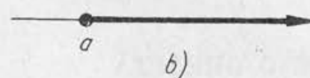
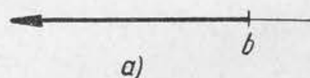


Fig. 9



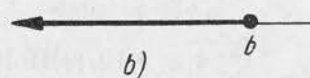


Fig. 10

5) Mulţimea $(-\infty, b)$ este formată din toate numerele x pentru care $x < b$ şi se numeşte *semidreaptă deschisă (nemărginită la stînga)* (fig. 10, a). Mulţimea $(-\infty, b]$ este definită de inegalitatea $x \leqslant b$ şi se numeşte *semidreaptă închisă (nemărginită la stînga)* (fig. 10, b).

---

* Asupra semnificaţiei precise a lui $+\infty$ şi $-\infty$ se va reveni pe larg în capitolul V.

6) Mulțimea tuturor numerelor reale R (sau toată dreapta) se mai notează $(-\infty, +\infty)$.

Semidreptele și dreapta întreagă se mai numesc *intervale nemărginite*.

Este evident că, dacă două intervale au cel puțin un punct comun, intersecția lor este tot un interval; dacă două intervale nu au nici un punct comun, intersecția lor este vidă.

Vom avea, de asemenea, de considerat mulțimi care sînt reuniuni de două sau mai multe intervale, mărginite sau nemărginite (fig. 11).

În figura 11, a, punctul b nu aparține reuniunii $[a, b) \cup (b, c)$, deoarece b nu aparține nici intervalului $[a, b)$, nici intervalului (b, c).

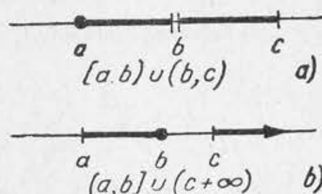
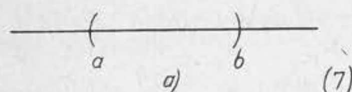
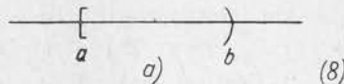
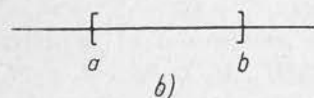


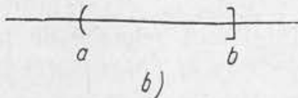
Fig. 11

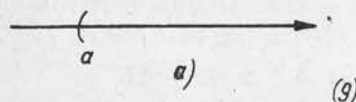
Observație. Intervalele pe dreaptă se reprezintă într-un mod care amintește notația lor. Astfel, intervalele de mai sus (indicate în fig. 7, 8, 9 și 10) se reprezintă respectiv, după cum urmează:

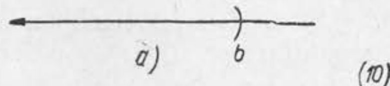


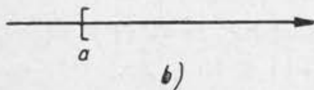


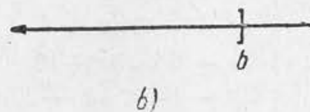












2. Vecinătățile unui punct

Fie x un punct de pe dreaptă. Se numește *vecinătate* a lui x orice *interval deschis* (a, b) care îl conține pe x, adică astfel încît $a < x < b$. Rezultă că un interval deschis (a, b) este vecinătatea oricărui punct x al său $(a < x < b)$.

Cu cît intervalul (a, b) este mai mic, cu atît punctele sale sînt „mai aproape" sau „mai vecine" de x.

Punctul x are atîtea vecinătăți cîte intervale deschise care îl conțin există.

Exemple: 1) Intervalele $(-1, 1)$ $(-2, 1)$, $\left(-1\,000, \frac{1}{2}\right)$, $(-\pi, 530)$, $\left(-\frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^8}\right)$ sînt toate vecinătăți ale lui 0.

2) Intervalele $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$ sînt toate vecinătăți ale lui $\frac{1}{2}$.

3) Intervalul închis $[0,1]$ *nu* este vecinătate nici a lui 0, nici a lui 1.

EXERCIȚII

Să se determine mulțimea soluțiilor comune ale perechilor de ecuații:

1. $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$ și $x^2 + 3x - 4 = 0$.

2. $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$ și $x^2 - x - 6 = 0$.

3. Fie P_1 mulțimea paralelogramelor, P_2 mulțimea dreptunghiurilor, P_3 mulțimea romburilor și P_4 mulțimea pătratelor. Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi și apoi să se determine: $P_1 \cup P_3$, $P_1 \cup P_4$, $P_2 \cup P_4$, $P_2 \cap P_4$, $P_2 \cap P_3$, $P_3 \cap P_4$.

4. Notînd cu N — mulțimea numerelor naturale, $M_1 = \{2n\}_{n \in N}$, $M_2 = \{6n\}_{n \in N}$, M_3 — mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0$, să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi și să se determine: $N \cup M_1$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cup M_3$, $N \cup M_3$, $N \cap M_3$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_2 \cap M_3$; să se arate că $(M_2 \cup M_3) \cap M_1 = (M_2 \cap M_1) \cup (M_3 \cap M_1)$.

Să se determine mulțimea numerelor *reale* x care verifică perechile de inegalități:

5. $\begin{cases} 2x > 6x + 8 \\ 4x + 3 < 2x + 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 5 \geqslant 6x - 11 \\ 3 - x < 3x - 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x + 6 \geqslant 5x + 12 \\ 3x - 18 < 4x - 20. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 10 \leqslant 2x - 11 \\ x + 14 \leqslant 15 + 2x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x - 7 > 5x - 1 \\ 3x + 6 > 8x - 4. \end{cases}$

Să se determine mulțimile de numere *întregi* x care verifică perechile de inegalități:

10. $\begin{cases} 5x - 1 \geqslant 4x - 6 \\ 2x + 5 > 3x + 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x + 2 \geqslant 4x + 3 \\ 2 - 6x > 3 - 9x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 5 < 3x + 8 \\ 9 + 4x > 3x + 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + 5 > x + 6 \\ 3 - 5x < 8 - 7x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 5 > 14 - 3x \\ 6 - 7x \geqslant -3x - 5. \end{cases}$

Să se determine mulțimile de numere *reale* x care verifică perechile de inegalități :

15. $\begin{cases} 1 + x + x^2 > 0 \\ -1 + 4x - 4x^2 < 0. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ -3 + 4x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0 \\ 5 + 4x - x^2 > 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -6 + 5x - x^2 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 0. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ 12x - x^2 - 35 > 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x^2 - 2x + 5 < 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 6x - x^2 - 9 \leqslant 0 \\ 1 - x + x^2 < 0. \end{cases}$

23. Să se determine mulțimea numerelor reale r pentru care ecuația $\sin x = \frac{3r}{r^2 + 1}$ are soluții.

CAPITOLUL III

ŞIRURI DE NUMERE

Introducere

Noţiunea de şir a fost întîlnită în clasele precedente — la algebră — cu ocazia aproximării cu fracţii zecimale a unor numere şi — la geometrie — cu ocazia calculului lungimii şi ariei cercului etc.

De exemplu, numărul $\frac{1}{3}$ se scrie ca fracţie zecimală :

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

Păstrînd una, două, trei, ..., n, ... zecimale, se obţine un şir de fracţii zecimale care aproximează prin lipsă numărul $\frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{l} 0,3 \\ 0,33 \\ 0,333 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underbrace{0,33...3}_{n \text{ cifre}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Păstrînd un număr din ce în ce mai mare de zecimale, se realizează o aproximare din ce în ce mai bună a numărului $\frac{1}{3}$. Se spune că şirul fracţiilor zecimale considerate are *limita* $\frac{1}{3}$.

În ceea ce priveşte calculul lungimii cercului, se consideră poligoane regulate înscrise în cerc, cu 4, 8, 16,..., 2^n, ...laturi, avînd perimetrele — respectiv — p_4, p_8, p_{16} ..., p_{2^n},... Luînd poligoane cu laturi din ce în ce mai multe, perimetrele lor aproximează din ce în ce mai bine

lungimea cercului. Se spune că șirul perimetrelor poligoanelor înscrise are ca *limită* lungimea cercului.

Numeroase alte probleme de algebră, geometrie și fizică ne conduc la noțiunile de șir și de limită a unui șir. De asemenea, după cum se va vedea mai departe, șirurile intervin în mod esențial atunci cînd se definesc alte noțiuni fundamentale din analiză, ca : limite de funcții, continuitate, derivată.

Dată fiind importanța acestei noțiuni, este necesar un studiu al șirurilor în general, independent de problemele concrete din care provin.

§ 1. GENERALITĂȚI

1. Definiția șirului

Să facem să corespundă fiecărui număr natural n un număr *real* a_n, după schema următoare :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & \ldots \end{array}$$

Obținem, în acest mod, un șir de numere * :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Numerele din care este format un șir se numesc *termenii* șirului. Indicele arată poziția sau rangul unui termen în șir. Astfel a_1 este primul termen al șirului, a_2 este al doilea termen al șirului, ... a_n este al n-lea termen al șirului etc.

Exemple de șiruri :

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (șirul numerelor naturale).

2) $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$

3) $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n, \ldots$ (șirul puterilor naturale ale lui 10).

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ (șirul inverselor numerelor naturale).

5) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$

6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ (șirul inverselor puterilor naturale ale lui 2).

* La capitolul despre funcții se va da o definiție precisă a șirului.

7) 0,3; 0,33; 0,333;...; 0,333...

$\left[\text{şirul fracţiilor zecimale care aproximează pe } \frac{1}{3}\right]$.

8) 1, 1, 1, ..., 1, ...
9) 0, 0, 0, ..., 0, ...
10) 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...

Se observă că, în fiecare din aceste exemple, termenii şirului se succed după o anumită regulă (sau lege).

În exemplul 4) primul termen este 1, al doilea termen este $\frac{1}{2}$, al treilea termen este $\frac{1}{3}$, al n-lea termen este $\frac{1}{n}$, adică:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots,\ a_n = \frac{1}{n}, \ldots$$

Un şir se scrie prescurtat astfel: $(a_n)_{n\in N}$ sau, mai simplu, (a_n). Astfel, şirul numerelor naturale se scrie $(n)_{n\in N}$ sau (n); şirul puterilor naturale ale lui 10 se scrie $(10^n)_{n\in N}$ sau (10^n) etc.

— Pentru ca un şir să fie dat, este suficient să se dea primul termen şi o lege de succesiune care să arate cum se obţine succesorul oricărui termen. Tot astfel, un şir este dat dacă se dă termenul de rang oarecare, a_n, ca o expresie care îl conţine pe n, astfel încît particularizînd pe $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$, se obţin respectiv termenii $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Exemple: 1° Şirul dat prin legea $a_n = \frac{1}{10^n}$ este:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$$

2° Şirul dat prin legea $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ este:

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}, \ldots$$

3° Şirul dat prin legea $a_n = 4$ (sau $a_n = 4 \cdot 1^n$) este:

$$4, 4, 4, \ldots, 4, \ldots$$

4° Şirul dat prin legea $a_n = \frac{2n}{n+3}$ este:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{2n}{n+3}, \ldots$$

5° Şirul dat prin legea $a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2}$ este:

$$0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$$

Termenii unui şir se pot reprezenta prin puncte pe dreaptă; dacă unii termeni ai şirului sînt egali, este evident că ei se reprezintă prin acelaşi punct.

Un şir este *constant*, dacă toţi termenii săi sînt egali. Şirurile din exemplele 8) şi 9) sînt şiruri constante.

2. Şiruri mărginite

Un şir este *mărginit* dacă există două numere între care se află cuprinşi toţi termenii săi sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă toţi termenii şirului se află într-un interval mărginit.

Exemple: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Termenii acestui şir sînt cuprinşi între 0 şi 1, adică se află în intervalul $[0,1]$, deci şirul este mărginit.

2) La fel, şirurile $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ şi $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ sînt mărginite.

3) Orice şir constant este mărginit, deoarece tuturor termenilor săi le corespunde pe dreaptă un singur punct.

4) Şirul $1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ este mărginit.

Un şir este *nemărginit* dacă termenii săi nu pot fi cuprinşi în nici un interval mărginit. Aceasta înseamnă că în afara *fiecărui* interval mărginit se află cel puţin un termen din şir.

Exemple de şiruri nemărginite:

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

2) $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$

Dacă $a > 1$, şirul $a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ este nemărginit.

Într-adevăr (v. cap. I, ineg. lui Bernoulli) oricare ar fi intervalul mărginit (α, β), există un termen a^n din acest şir astfel încît să avem $a^n > \beta$; adică a^n este în afara intervalului considerat.

În particular, şirurile $2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$, şi $10, 10^2, \ldots, 10^n, \ldots$ sînt nemărginite.

3. Şiruri monotone

Un şir (a_n) este *crescător*, dacă fiecare termen este mai mic sau egal cu succesorul său:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$$

Exemple de şiruri crescătoare:

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

2) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$

3) 1,9; 1,99; 1,999; ...

4) 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., n, n, ...

5) Dacă $a > 1$, şirul $a, a^2, a^3, \dots a^n, \dots$ este crescător (şi nemărginit).
În particular, şirurile $2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$ şi $10, 10^2, \dots, 10^n, \dots$ sînt crescătoare.

Un şir (a_n) este *descrescător*, dacă fiecare termen este mai mare sau egal cu succesorul său:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \dots$$

Exemple de şiruri descrescătoare:

1) $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

3) 1,1; 1,01; 1,001; ...

4) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \dots, -n, -n, \dots$

5) Dacă $0 < a < 1$, şirul $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ este descrescător.

În particular, şirurile $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ şi $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$ sînt descrescătoare.

Atît şirurile crescătoare, cît şi cele descrescătoare se numesc *monotone.*

Exemple de şiruri care nu sînt monotone:

1) $1, -2, 3, -4, \dots$

2) 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...

§ 2. ŞIRURI CONVERGENTE

1. Un exemplu de şir convergent

Fie şirul:

$$1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \dots;\ 1{,}\underbrace{00\dots0}_{n \text{ cifre}}1;\ \dots$$

Acest şir se poate scrie şi astfel:

$$1+\frac{1}{10},\ 1+\frac{1}{10^2},\ 1+\frac{1}{10^3},\dots,\ 1+\frac{1}{10^n},\dots$$

Dacă notăm $a_1 = 1+\frac{1}{10}$, $a_2 = 1+\frac{1}{10^2}, \dots, a_n = 1+\frac{1}{10^n}$, atunci acest şir se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Să reprezentăm pe o dreaptă termenii acestui şir (fig. 12).

În figură am reprezentat — aproximativ — doar primii trei termeni, deoarece ceilalţi sînt atît de apropiaţi de 1, încît nu mai pot fi figuraţi. Cu cît un termen are mai multe zecimale, cu atît el este mai apropiat de 1. Se poate spune că termenii şirului se „îngrămădesc“ către 1.

Distanţa dintre 1 şi un termen a_n al şirului este:

$$a_n - 1 = \frac{1}{10^n}.$$

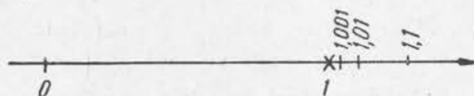


Fig. 12

De aici se vede că, cu cît n este mai mare, cu atît distanţa $a_n - 1$ este mai mică *. Dacă n este suficient de mare, se poate realiza ca distanţa $a_n - 1$ să fie mai mică decît un număr ales după voie.

Astfel, dacă dorim ca distanţa aceasta să fie mai mică decît $\frac{1}{1000}$, luăm a_n cu $n \geqslant 4$, deoarece:

$$a_4 - 1 = \frac{1}{10^4} < \frac{1}{1000}; \quad a_5 - 1 = \frac{1}{10^5} < \frac{1}{1000}, \ldots$$

Dacă dorim ca această distanţă să fie mai mică decît $\frac{1}{10^{15}}$, luăm a_n cu $n \geqslant 16$, deoarece:

$$a_{16} - 1 = \frac{1}{10^{16}} < \frac{1}{10^{15}}; \quad a_{17} - 1 = \frac{1}{10^{17}} < \frac{1}{10^{15}}, \ldots$$

În general, dacă se ia, după voie, un număr $\varepsilon > 0$, se poate găsi în şir un termen a cărui distanţă de 1 să fie mai mică decît ε. Pentru aceasta, să notăm $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Deoarece şirul

$$10, 10^2, \ldots, 10^n, \ldots$$

Fig. 13

este crescător şi nemărginit, există în acest şir un termen mai mare decît A (fig. 13). Să notăm cu N exponentul pentru care $10^N > A$, adică $10^N > \frac{1}{\varepsilon}$.

De aici rezultă $\frac{1}{10^N} < \varepsilon$, adică $a_N - 1 < \varepsilon$.

Aşadar, am găsit un termen, a_N, care se află la o distanţă de 1 mai mică decît numărul ε, ales după voie.

---

* Prin această exprimare trebuie să se înţeleagă că „dacă n este din ce în ce mai mare, atunci $a_n - 1$ este din ce în ce mai mic“, sau „dacă n creşte, $a_n - 1$ descreşte“.

Să observăm că *toţi* termenii din şir care urmează după a_N au aceeaşi proprietate de a fi la o distanţă de 1 mai mică decît ε. Într-adevăr, dacă un termen a_n se află în şir după a_N, aceasta înseamnă că $n > N$. Atunci, $10^n > 10^N$, şi deci $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^N}$. Deoarece $\frac{1}{10^N} < \varepsilon$, rezultă $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, adică

$$a_n - 1 = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Aşadar, şirul (a_n) are următoarea proprietate:

Dacă alegem, după voie, un număr strict pozitiv, $\varepsilon > 0$, putem găsi în şir un termen a_N, astfel încît, pentru toţi termenii a_n care îi urmează ($n > N$) să avem:

$$a_n - 1 < \varepsilon.$$

Desigur, dacă alegem un alt număr $\varepsilon' > 0$, găsim în şir un *alt* termen $a_{N'}$ astfel că, dacă $n > N'$, să avem:

$$a_n - 1 < \varepsilon'.$$

Mai sus, pentru $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ am găsit $N = 4$, iar pentru $\varepsilon' = \frac{1}{10^{15}}$ am găsit $N' = 16$. Ne dăm seama uşor că, luînd pentru ε valori din ce în ce mai mici, indicele N care îi corespunde este din ce în ce mai mare.

Proprietatea şirului (a_n) pusă în evidenţă mai sus se exprimă prescurtat spunînd că „*1 este limita şirului* (a_n)" sau că „*şirul* (a_n) *este convergent către* 1".

Această proprietate are şi un aspect geometric. Să luăm un interval deschis, cu centrul 1, de lungime 2ε (fig. 14). Jumătatea din stînga lui 1 are lungimea ε, iar cea din dreapta lui 1 are tot lungimea ε. Extremităţile acestui interval sînt deci $1 - \varepsilon$ şi $1 + \varepsilon$ iar intervalul se scrie $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. A spune că distanţa dintre a_N şi 1 este mai mică decît ε înseamnă a spune că a_N se află în intervalul $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Atunci, *toţi* termenii din şir care urmează lui a_N se găsesc de asemenea în intervalul $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. În afara acestui interval se află cel mult termenii:

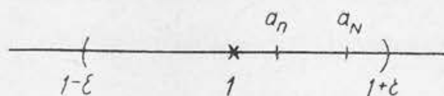


Fig. 14

$$a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$$

în număr finit. Dar intervalele deschise care conţin pe 1 se numesc *vecinătăţi* ale lui 1. Deci, proprietatea de mai sus se exprimă în limbaj geometric astfel:

În afara fiecărei vecinătăţi a lui 1 se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Desigur, cu cît vecinătatea lui 1 este *mai mică*, cu atît se vor afla în afara sa *mai mulţi* termeni, însă *tot număr finit.*

2. **Definiţia limitei unui şir**

Consideraţiile făcute asupra şirului particular de mai sus pot fi extinse la un şir oarecare.

D e f i n i ţ i e. Se spune că un număr a este limita unui şir (a_n) dacă, în afara fiecărei vecinătăţi a lui a, se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului (a_n) (fig. 15).

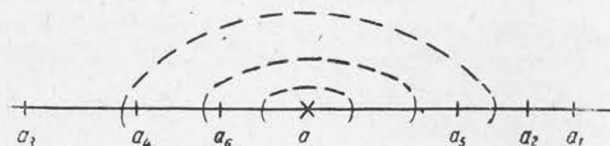


Fig. 15

Orice şir care are limită se numeşte şir *convergent.*

Dacă a este limita şirului (a_n), se spune că *„şirul (a_n) este convergent către a“* sau că *„şirul (a_n) tinde către a“*, şi se scrie* astfel :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{sau} \quad a_n \to a$$

($\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se citeşte „limită de a_n cînd n tinde către infinit“ ; $a_n \to a$ se citeşte „a_n tinde către a“).

Din definiţie rezultă că, dacă şirul (a_n) are limita a, atunci, prin înlăturarea sau adăugarea la acest şir a unui număr finit de termeni, se obţine un nou şir, care are de asemenea limita a. Într-adevăr, în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află tot un număr finit de termeni ai noului şir.

De asemenea, prin schimbarea ordinei termenilor şirului (a_n) se obţine un şir care are tot limita a. Într-adevăr, poziţia pe dreaptă a termenilor şirului nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică.

Considerînd acum vecinătăţile lui a de forma $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$, a spune : $a_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ înseamnă că $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ sau, scăzînd a, obţinem $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, adică (v. cap. I, § 1, nr. 3, propr. 6) :

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

---

* Asupra notaţiei $n \to \infty$ şi expresiei „n tinde către infinit“ se va reveni în capitolul V

Dacă $a_n \to a$, termenii din şir care nu verifică această inegalitate, deci care se află în afara vecinătăţii $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, sînt în număr finit. Însă, aceşti termeni fiind în număr finit, putem găsi în şir un termen a_N, după care nu se mai află nici unul dintre ei (fig. 16). Urmează că *toţi* termenii a_n

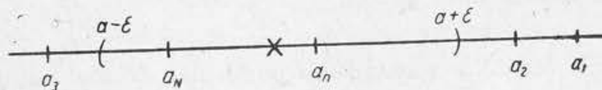


Fig. 16

din şir care se află după a_N se găsesc în vecinătatea $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ şi, deci, verifică inegalitatea $| a_n - a | < \varepsilon$.

Reciproc, dacă această condiţie este îndeplinită, atunci în afara fiecărei vecinătăţi de forma $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Deoarece fiecare vecinătate a lui a conţine o vecinătate de forma $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, rezultă $a_n \to a$.

Se obţine astfel următoarea :

T e o r e m ă. Un număr a este limita unui şir (a_n) dacă, şi numai dacă, pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ se poate găsi în şir un termen a_N, astfel încît pentru toţi termenii a_n din şir care îi urmează (adică $n \geqslant N$) **să avem:**

$$| a_n - a | < \varepsilon.$$

Exemple de şiruri convergente :

1) Cel mai simplu exemplu de şir convergent este un şir *constant :*

$$a,\ a,\ a,\ \ldots,\ a,\ \ldots$$

care are limita a. Într-adevăr, toţi termenii şirului fiind egali cu a, în reprezentarea pe dreaptă coincid într-un singur punct (fig. 17). În afara oricărei vecinătăţi a lui a nu se află nici un termen al şirului, deci a este limita şirului.

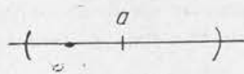


Fig 17

Aşadar, dacă avem $a_n = a$ pentru toţi termenii şirului (a_n), atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a = a, \text{ sau } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

2) Din exemplul examinat în acest paragraf la nr. 1 rezultă :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1.$$

3) Şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ are limita 0 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Să alegem un număr oarecare $\varepsilon > 0$. Dacă notăm $A = \frac{1}{\varepsilon}$, putem găsi un număr natural $N > A$ şi deci $\frac{1}{N} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. Dacă $n > N$, atunci cu atît mai mult $\frac{1}{n} < \varepsilon$, sau

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Deducem, deci, că 0 este limita şirului $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Raţionamentul de la exemplul 3) se poate generaliza:

T e o r e m ă. Dacă (a_n) este un şir crescător şi nemărginit, atunci şirul inverselor $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este convergent către 0.

Într-adevăr, dacă alegem un număr $\varepsilon > 0$ şi notăm $A = \frac{1}{\varepsilon}$, şirul (a_n) fiind nemărginit, putem găsi în acest şir un termen $a_N > A = \frac{1}{\varepsilon}$. (Demonstraţia se continuă ca la exemplul 3.)

Exemple: Dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Într-adevăr, $b = \frac{1}{a} > 1$, deci şirul (b^n) este crescător nemărginit, iar $a^n = \frac{1}{b^n}$.

În particular, şirurile $2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ...$ şi $10, 10^2, 10^3, ..., 10^n, ...$ sînt crescătoare şi nemărginite, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Şirurile care nu sînt convergente se numesc *şiruri divergente*.

Exemple de şiruri divergente:

1) Şirul 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ... nu este convergent. Să arătăm mai întîi că 1 nu este limita acestui şir. Pentru aceasta, să alegem vecinătatea $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a lui 1 (fig. 18).

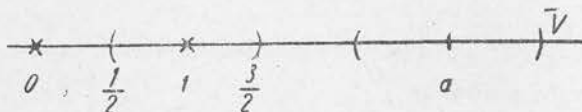


Fig. 18

În afara acestei vecinătăţi se află o infinitate de termeni ai şirului şi anume toţi termenii şirului egali cu 0; deci 1 nu este limita şirului. La fel se arată că 0 nu este limita şirului, alegînd — de exemplu — vecinătatea $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. În ceea ce priveşte orice *alt* număr a, putem lua o vecinătate V a lui a, care să nu conţină nici pe 1, nici pe 0, deci în afara

acestei vecinătăţi se află *toţi* termenii şirului. Aşadar, nici a nu este limita şirului. Urmează că neavînd nici o limită, şirul nu este convergent, deci este divergent.

2) Şirul numerelor naturale 1, 2, ..., n, ... este divergent. Pentru a arăta aceasta, să considerăm un număr *oarecare* a şi o vecinătate a lui a, de lungime 1 (fig. 19).

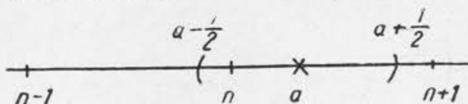


Fig. 19

Deoarece distanţa dintre două numere naturale este cel puţin egală cu 1, în vecinătatea aleasă se află *un singur* număr natural, deci în afara ei se află o *infinitate* de numere naturale. Urmează că a nu este limita acestui şir. Cum numărul a a fost luat la întîmplare rezultă că nici un număr nu este limită a şirului (n), adică acest şir nu este convergent.

Observaţie. La nr. 5 se va vedea că orice şir nemărginit este divergent.

3. Un criteriu de convergenţă

În exemplele de şiruri convergente considerate anterior s-a putut stabili uşor limita folosind direct definiţia. În alte cazuri, folosirea definiţiei este greoaie şi de aceea sînt utile anumite criterii de convergenţă. Aceste criterii permit ca din convergenţa unor şiruri cunoscute să deducem convergenţa şi altor şiruri.

T e o r e m ă. (Criteriu de convergenţă.) **Dacă termenii unui şir (a_n) sînt mai mici în modul decît termenii corespunzători ai unui şir (α_n) de numere $\geqslant 0$, convergent către 0, ($|a_n| < \alpha_n$), atunci şirul (a_n) este convergent către 0:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Într-adevăr, să luăm un număr oarecare $\varepsilon > 0$. Deoarece $\alpha_n \to 0$, există un termen α_N, astfel încît pentru toţi termenii α_n care îi urmează $(n > N)$ să avem $\alpha_n < \varepsilon$. Deoarece, prin ipoteză, $|a_n| \leqslant \alpha_n$, pentru $n > N$ avem cu atît mai mult:

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon,$$

adică 0 este limita şirului (a_n).

Exemple:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, deoarece $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ (v. cap. I, aplicaţii la ineg. lui Bernoulli) şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, deoarece $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$, deoarece $\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, deoarece $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, deoarece $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n}$ (k număr natural).

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$, deoarece $\left|\sin \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

4. Limita şirului modulelor ($|a_n|$)

Teoremă. Dacă $a_n \to a$, atunci $|a_n| \to |a|$:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

Se foloseşte inegalitatea:

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a|.$$

Să luăm un număr oarecare $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to a$, putem găsi un termen a_N, astfel încît pentru toţi termenii a_n care îi urmează ($n > N$) să avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Atunci, cu atît mai mult:

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon,$$

adică $|a|$ este limita şirului modulelor ($|a_n|$).

Teorema aceasta se enunţă simplificat * sub forma următoare:

Modulul limitei este egal cu limita modulului

Exemplu: Din $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-1 - \frac{1}{10^n}\right) = -1$ deducem $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1$.

Observaţie. Nu trebuie să se creadă că dacă şirul modulelor ($|a_n|$) este convergent, atunci şi şirul (a_n) este convergent. De exemplu, şirul

$$1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, \ldots$$

nu este convergent, deşi şirul modulelor

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

este convergent, fiind un şir constant.

* Şi în restul manualului vor apare frecvent enunţuri de teoreme sub formă simplificată. Trebuie subliniat că aceste enunţuri sînt incomplete, dar prezintă avantajul că pot fi uşor memorate.

Totuşi, dacă şirul modulelor $(|a_n|)$ este convergent către 0, atunci şi şirul (a_n) este convergent către 0, cum se poate deduce uşor folosind criteriul de convergenţă:

$$|a_n - 0| = |a_n| \to 0.$$

5. Şiruri mărginite, şiruri monotone

O altă proprietate a şirurilor convergente este exprimată de teorema următoare:

Teoremă. Orice şir convergent este mărginit.

Fie (a_n) un şir convergent către a. Să considerăm o vecinătate a lui a, de exemplu $(a-1, a+1)$ (fig. 20). În afara acestei vecinătăţi se află numai



Fig. 20

un număr finit de termeni, de exemplu $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$. Aceştia, fiind în număr finit, se poate găsi un interval mărginit $[\alpha, \beta]$, care să-i conţină, conţinînd totodată şi intervalul $(a-1, a+1)$. Urmează că toţi termenii şirului se află în intervalul $[\alpha, \beta]$, adică şirul este mărginit.

Din această teoremă se deduce imediat că:

Orice şir nemărginit este divergent.

Într-adevăr, dacă şirul ar fi convergent, ar rezulta că este mărginit, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Următoarele şiruri sînt divergente, deoarece sînt nemărginite:

1) $1, 2, \ldots, n, \ldots$; 2) $0, 1, 0, 2, \ldots, 0, n, \ldots$;
3) $-1, 2, -3, 4, \ldots$; 4) $1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$, ($k$ natural);
5) $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots, (a > 1)$; în particular, $2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$; $10, 10^2, \ldots, 10_n, \ldots$

Observaţie. Proprietatea unui şir de a fi mărginit este o condiţie necesară pentru convergenţa sa, dar nu suficientă.

De exemplu, şirul:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

este mărginit, dar nu este convergent.

Se poate asigura convergenţa unui şir mărginit, dacă se adaugă o condiţie suplimentară, aceea de a fi monoton.

Teorema de convergenţă a şirurilor monotone. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Demonstraţia acestei teoreme depăşeşte cadrul manualului.

Dacă şirul (a_n) este crescător, limita sa, a, este mai mare sau egală cu toţi termenii şirului: $a_n \leqslant a$; dacă şirul (a_n) este descrescător, limita sa, a, este mai mică sau egală cu toţi termenii şirului: $a \leqslant a_n$.

Exemple:

1) Să considerăm un şir de fracţii zecimale obţinute una din cealaltă prin adăugarea unei zecimale:

$$a_0, a_1;\ a_0, a_1a_2;\ a_0, a_1a_2a_3;\ \ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n;\ \ldots$$

Termenii acestui şir sînt cuprinşi între a_0 şi $a_0 + 1$, deci şirul este mărginit. Este evident că şirul este crescător. Rezultă că şirul are limită.

Astfel, fracţiile zecimale care aproximează prin lipsă un număr real x formează un şir convergent către x. De exemplu, şirul

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots,$$

obţinut cu zecimalele numărului $\sqrt{2}$, este convergent către $\sqrt{2}$.

2) Să reluăm un exemplu care a mai fost considerat în clasa a IX-a. Fie $0 < q < 1$. Să formăm progresia geometrică cu n termeni:

$$\div\!\!\div\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^{n-1}.$$

Se ştie că suma S_n a acestei progresii este:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Să arătăm că şirul $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ este convergent. În primul rînd, acest şir este *crescător*, deoarece $q^n > 0$ şi deci:

$$S_n < S_n + q^n = S_{n+1}.$$

Şirul (S_n) este de asemenea *mărginit*. Într-adevăr, avem $0 < q^n < 1$, deci $0 < 1 - q^n < 1$ şi, împărţind cu numărul pozitiv $1 - q$, obţinem

$$0 < \frac{1 - q^n}{1 - q} < \frac{1}{1 - q},$$

adică:

$$0 < S_n < \frac{1}{1 - q}.$$

Termenii şirului (S_n) sînt cuprinşi între 0 şi $\frac{1}{1-q}$. Fiind crescător şi mărginit, şirul (S_n) este convergent. Se va arăta mai departe că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

6. Numărul e

Fie şirul :

$$(1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Să arătăm că acest şir este crescător şi mărginit de unde va rezulta că este convergent. Pentru aceasta, să notăm

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

şi să dezvoltăm membrul drept după formula binomului lui Newton :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Se observă că :

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n}}{1\cdot 2\ldots k} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

aşa încît :

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Deoarece $0 < 1 - \frac{k}{n} < 1$, în fiecare paranteză se obţine un număr pozitiv, deci membrul drept este o sumă de termeni pozitivi mai mare decît suma primilor doi termeni $1 + 1 = 2$. Deducem :

$$2 < a_n.$$

Pe de altă parte, numărul din fiecare paranteză este mai mic decît 1, deci, înlocuind în membrul drept fiecare paranteză cu 1, obţinem o sumă mai mare. Înlocuind fiecare factor > 1 de la numitor cu 2, termenii sumei se măresc încă, aşa încît:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + S_n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

unde: $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$.

Aşadar:

$$2 < a_n < 3, \text{ (pentru orice } n)$$

adică şirul (a_n) este *mărginit*. Să arătăm acum că este şi *crescător*.

Să observăm că termenul a_n are în dezvoltarea sa $n + 1$ termeni, iar a_{n+1} are $n + 2$ termeni, adică are un termen în plus. Termenul a_{n+1} se scrie:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{1\cdot 2 \dots k}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{1\cdot 2 \dots (n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Dar $n < n + 1$, deci $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Prin urmare, $\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$, de unde $-\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1}$, deci $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$. Rezultă că numărul din fiecare paranteză din dezvoltarea lui a_n este *mai mic* decît numărul din paranteza corespunzătoare din dezvoltarea lui a_{n+1}. Rezultă că fiecare termen din dezvoltarea lui a_n este mai mic decît termenul corespunzător din dezvoltarea lui a_{n+1}. Deoarece a_{n+1} mai are şi un termen pozitiv în plus (ultimul), deducem că:

$$a_n < a_{n+1},$$

adică şirul (a_n) este *crescător*.

Şirul (a_n) are, deci, o limită. Această limită se notează cu litera e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Din faptul că $2 < a_n < 3$ se deduce că şi limita şirului (a_n), e, este cuprinsă între 2 şi 3 (v. § 3, nr. 4):

$$2 < e < 3.$$

Se demonstrează că e este un număr iraţional. Valoarea aproximativă a numărului e cu patru zecimale exacte este 2,7182.

§ 3. OPERAŢII CU ŞIRURI CONVERGENTE

Se va arăta acum că, efectuînd cu termenii unor şiruri convergente operaţiile de adunare, înmulţire şi împărţire, se obţin alte şiruri convergente.

1. Şirul sumelor $(a_n + b_n)$

T e o r e m a 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul $(a_n + b_n)$ este de asemenea convergent şi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}$$

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Să alegem un număr oarecare $\varepsilon > 0$. În primul şir putem găsi un termen $a_{N'}$, astfel încît pentru termenii a_n care îi urmează $(n > N')$ să avem:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De asemenea, în al doilea şir putem găsi un termen $b_{N''}$, astfel încît pentru termenii b_n care îi urmează $(n > N'')$ să avem:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă notăm cu N pe cel mai mare dintre numerele N' şi N'' şi dacă $n > N$, atunci $n > N'$ şi $n > N''$, deci $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$; urmează că, dacă $n > N$, atunci:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant$$

$$\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

şi prin urmare, $a + b$ este limita şirului $(a_n + b_n)$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema 2. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul $(a_n - b_n)$ este de asemenea convergent şi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n}$$

Demonstraţia se face ca şi pentru teorema 1, scriind:

$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$

Cele două teoreme se enunţă simplificat astfel:

Limita sumei este egală cu suma limitelor

Limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor

Din aproape în aproape se arată că teorema 1 este adevărată şi *pentru suma mai multor şiruri convergente* (în număr finit):

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n + \ldots + f_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n + \ldots + \lim_{n\to\infty} f_n.$$

În particular, luînd k şiruri egale cu (a_n) deducem:

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n \qquad (k \text{ natural}).$$

Consecinţa 1. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *atunci* $\lim_{n\to\infty}(a_n + \alpha) = \lim_{n\to\infty} a_n + \alpha$ (α real oarecare).

Într-adevăr, luînd $b_n = \alpha$ pentru orice n, (b_n) este un şir constant şi deci $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$. Se aplică apoi teorema 1.

Consecinţa 2. *Dacă* $a_n \to a$, *atunci* $a_n - a \to 0$. *Reciproc, dacă* $a_n - a \to 0$, *atunci* $a_n \to a$.

Într-adevăr, dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = \lim_{n\to\infty} a_n - a = a - a = 0$.

Reciproc, dacă $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[(a_n - a) + a] = \lim_{n\to\infty}(a_n - a) + a = 0 + a = a$.

Exemple:

1) Dacă $0 < q < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1$.

Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (v. § 2, nr. 2) şi deci $\lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1 - \lim_{n\to\infty} q^n = 1 - 0 = 1$.

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$

2. Şirul produselor $(a_n \cdot b_n)$

S-a arătat mai sus că, dacă $a_n \to a$ şi k este un număr natural, atunci $ka_n \to ka$. În particular, dacă $a_n \to 0$, atunci $ka_n \to 0$.

Această proprietate este adevărată şi dacă factorul k nu este număr natural:

T e o r e m a 1. **Dacă (a_n) este un şir convergent şi c este un număr real oarecare, atunci şirul (ca_n) este de asemenea convergent şi**

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

Fie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi fie k un număr natural, astfel încît $|c| \leqslant k$.

Atunci

$$|ca_n - ca| = |c(a_n - a)| = |c|\,|a_n - a| \leqslant k\,|a_n - a|.$$

Dar, deoarece $a_n \to a$, atunci $a_n - a \to 0$, deci $|a_n - a| \to 0$ şi, prin urmare, $k|a_n - a| \to 0$. Conform criteriului de convergenţă, deducem $ca_n - ca \to 0$ şi deci $ca_n \to ca$.

Exemple:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(a + b\frac{1}{n}\right) = a + b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a + b \cdot 0 = a.$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 2n + 1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left[5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] = 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 5.$

3) Dacă $0 < q < 1$, avem $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ şi deci $\lim_{n\to\infty} aq^n = 0$.

În particular, dacă luăm $a = \frac{1}{1-q}$, deducem: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$.

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă $a_n \to 0$ şi (b_n) este un şir mărginit, atunci $a_n b_n \to 0$.*

Într-adevăr, deoarece (b_n) este mărginit, putem găsi un interval $(-M, M)$, cu centrul în 0, care să conțină toți termenii acestui șir, adică astfel ca $-M \leqslant b_n \leqslant M$, sau $|b_n| \leqslant M$. Atunci:

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leqslant |a_n|\,M.$$

Dar $|a_n| \to 0$, deci $|a_n|\,M \to 0$ și, conform criteriului de convergență, deducem că $a_n b_n \to 0$.

Teorema 2. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente, atunci șirul $(a_n b_n)$ este convergent și

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n}$$

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Atunci:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)\,b_n + a\,(b_n - b).$$

Dar șirul (b_n) este mărginit (fiind convergent) și $a_n - a \to 0$, deci:

$$(a_n - a)\,b_n \to 0.$$

De asemenea, $b_n - b \to 0$, deci:

$$a\,(b_n - b) \to 0.$$

Urmează că:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - ab) = \lim_{n\to\infty} (a_n - a)\,b_n + \lim_{n\to\infty} a\,(b_n - b) = 0$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema aceasta se poate enunța simplificat astfel:

Limita produsului este egală cu produsul limitelor

Teorema 2 este adevărată și *pentru produsul mai multor șiruri convergente* (în număr finit):

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n c_n \ldots f_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} c_n \ldots \lim_{n\to\infty} f_n.$$

În particular, luînd k șiruri egale cu (a_n), deducem:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^k) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \qquad (k \text{ natural}).$$

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{kn} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]^k = \left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]^k = e^k$ (k natural).

3. Şirul cîturilor $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

Să considerăm acum şirul cîturilor termenilor a două şiruri convergente. În primul rînd, deoarece împărţirea cu 0 nu are sens, trebuie ca $b_n \neq 0$ pentru orice n.

Se demonstrează mai întîi o proprietate ajutătoare:

Dacă $b_n \neq 0$ *pentru orice* n *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, *atunci şirul* $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Să arătăm mai întîi că şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este *mărginit*. Din ipoteza $b_n \to b$ deducem $|b_n| \to |b| > 0$. Să alegem (fig. 21) o vecinătate (α, β) a lui $|b|$ cu $\alpha > 0$. În această vecinătate se află toţi termenii $|b_n|$, cu excepţia unui

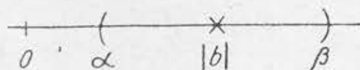


Fig. 21

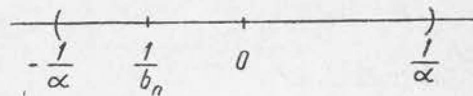


Fig. 22

număr finit dintre ei. Pentru termenii $|b_n|$ din această vecinătate avem $\alpha < |b_n|$, deci $\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\alpha}$, adică $-\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{\alpha}$. Cu alte cuvinte, aceşti termeni $\frac{1}{b_n}$ se află în intervalul $\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ (fig. 22).

Ceilalţi termeni $\frac{1}{b_n}$ care nu se află în această vecinătate sînt în număr finit, deci putem găsi un interval mai mare care să-i conţină şi pe aceştia. Rezultă că şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este *mărginit*. Deoarece $b_n - b \to 0$, deducem că (v. consec. de la nr. 2):

$$\frac{1}{b_n}(b_n - b) \to 0.$$

Atunci:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n}(b - b_n) \to 0$$

și deci : $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, adică :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Observație. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este nemărginit, deci nu este convergent.

Se poate trece acum la șirul cîturilor.

T e o r e m ă. **Dacă șirurile (a_n) și (b_n) sînt convergente, dacă $b_n \neq 0$ pentru orice n și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci șirul $\frac{a_n}{b_n}$ este convergent și**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}}$$

Într-adevăr, se poate scrie :

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$$

și deci :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Teorema aceasta se enunță simplificat astfel :

> **Limita cîtului este egală cu cîtul limitelor, dacă limita de la numitor este diferită de 0.**

C o n s e c i n ț ă. *Dacă (a_n) este un șir convergent și dacă $a_n \neq 0$ pentru orice n și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci șirul (a_n^{-k}) este convergent și*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-k} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{-k},$$

k fiind un număr natural oarecare.

Exemple:

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 5n^3 + 2n + 6}{2n^4 + 7n^2 - n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}\right)}{n^4\left(2 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}}{2 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)} = \frac{3}{2}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4n-3}{n^5+3n^4+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(\frac{1}{n^3}-\frac{4}{n^4}-\frac{3}{n^5}\right)}{n^5\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n_5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}-\frac{4}{n^4}-\frac{3}{n^5}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^5}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{4}{n^4}-\frac{3}{n^5}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^5}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

3) Deoarece $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-kn}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^k=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^k=$$

$$=\left(\frac{1}{e}\right)^k=e^{-k}\quad (k \text{ natural}).$$

5) Deoarece:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

De aici rezultă imediat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=e^{-1}.$$

Observaţie. Dacă numitorul cîtului $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limita 0, s-ar putea ca şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ să nu aibă limită.

Exemplu: $a_n=1$, $b_n=\frac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Dar $\frac{a_n}{b_n}=n$ şi ştim că şirul (n): 1, 2, ..., n, .. nu are limită, deoarece este nemărginit.

4. Trecerea la limită în inegalităţi

Teoremă. Dacă şirul (a_n) este convergent şi dacă $a_n \geqslant 0$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0.$$

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Să presupunem, prin absurd, că $a < 0$ şi să luăm o vecinătate (α, β) a lui a cu $\beta < 0$ (fig. 23). În această vecinătate ar trebui să se afle termeni a_n ai şirului, deci pentru aceşti termeni am avea $a_n < \beta < 0$, ceea ce contrazice ipoteza că $a_n \geqslant 0$. Urmează că $a \geqslant 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

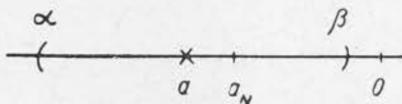


Fig. 23

Observaţie. Este posibil ca termenii şirului să fie strict pozitivi şi, totuşi, limita să fie 0. De exemplu, şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ are termenii strict pozitivi, dar are limita 0.

Consecinţa 1. *Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice n, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Pentru demonstraţie se aplică teorema precedentă şirului $(b_n - a_n)$: $b_n - a_n \geqslant 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geqslant 0$; dar $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi, prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Consecinţa 2. *Dacă (a_n) este un şir convergent şi dacă $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ pentru orice n, atunci:*

$$\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \beta.$$

Se foloseşte consecinţa 1, aplicată mai întîi şirului constant (α) şi şirului (a_n), iar apoi şirului (a_n) şi şirului constant (β).

Exemplu: S-a arătat (§ 2, nr. 6) că $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, deci $2 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$, adică $2 \leqslant e \leqslant 3$. Am precizat astfel un rezultat enunţat anterior.

EXERCIŢII

1. Să se arate că dacă şirul (a_n) este crescător, atunci şirul $(-a_n)$ este descrescător; dacă, în plus, $a_n > 0$ pentru orice n, atunci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este de asemenea descrescător.

Să se arate că următoarele şiruri sînt monotone şi mărginite:

2. $a_n = -\frac{n+1}{n}$.

3. $a_n = \frac{\alpha n}{n+1}$ (α număr real oarecare; $\beta > 0$).

4. $a_n = \frac{\alpha n}{\beta n + 1}$.

Să se arate, aplicînd teorema de la pagina 29, că şirul:

5. $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$ are limita 2;

iar şirul

6. $\frac{\alpha}{\beta+1}, \frac{2\alpha}{2\beta+1}, \ldots, \frac{\alpha n}{\beta n+1}, \ldots$ (α număr real oarecare; $\beta > 0$) are limita $\frac{\alpha}{\beta}$.

Să se stabilească dacă următoarele şiruri sînt convergente şi, în caz afirmativ, să se determine limita lor.

7. $a_n = \sin n\pi$; $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$; $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$; $a_n = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$.

8. $a_n = \cos n\pi$; $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$; $a_n = \cos \frac{n\pi}{4}$; $a_n = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$;

$$a_n = \cos 2n\pi; \quad a_n = \cos (2n+1)\pi.$$

Să se arate că următoarele şiruri au limita 0:

9. $a_n = \frac{1}{1+2^n}$. **10.** $a_n = \frac{1}{\alpha + \beta^n}$ ($\alpha > 0$, $\beta > 1$).

11. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n+7}$. **12.** $a_n = \sin \frac{\alpha}{n}$ (α număr real oarecare).

13. $a_n = \cos \frac{\alpha}{n} - 1$ (α număr real oarecare).

14. $a_n = \frac{1 + 10^{2n}}{10^{3n}}$. **15.** $a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n}{2^{2n}}$.

Aplicînd teorema de convergenţă a şirurilor monotone să se arate că următoarele şiruri sînt convergente :

16. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., adică,
$a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, pentru $n \geqslant 2$.

17. $a_1 = \sqrt{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $a_n = \sqrt{\alpha + a_{n-1}}$, pentru $n \geqslant 2$
(generalizarea şirului de la exerciţiul 16).

18. $a_1 = \frac{\alpha}{2}$ $(0 < \alpha < 1)$, $a_n = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$, pentru $n \geqslant 2$.

19. $a_1 = \frac{\alpha}{2}$ $(\alpha > 1)$, $a_n = \frac{\alpha}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, pentru $n \geqslant 2$.

Să se determine limita următoarelor şiruri :

20. $a_n = \frac{1}{2^n} + (0{,}05)^n - 3.$

21. $a_n = \cos\frac{2}{n} - 3.$

22. $a_n = 5\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right].$

23. $a_n = \frac{\alpha n}{2^n(n+1)}.$

24. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \cos^2\frac{\alpha}{n}.$

25. $a_n = \frac{(0{,}7)^n - 3}{-2 + (0{,}01)^n}.$

26. $a_n = \frac{3\alpha^n + 4}{2\beta^n - 1}$ $(\alpha, \beta \in (0,1)).$

27. $a_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^n}.$

28. $a_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}.$

29. $a_n = \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha^n + \alpha^{-n}}.$

30. $a_n = \frac{5n^2 + 3n - 1}{(n+1)^2}.$

31. $a_n = \frac{3(1-n)(n+2)}{(3n+4)(4+7n)}.$

32. $a_n = \frac{(1-n)(3-n)(2n-5)}{n^4 - 2n^3 + n^2 + 1}.$

33. $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}.$

CAPITOLUL IV

PUTERI ȘI LOGARITMI

§ 1. LIMITE DE PUTERI RAȚIONALE

S-a văzut în capitolul precedent (§ 3, nr. 2 și nr. 3) că dacă (a_n) este un șir convergent și dacă $a_n \neq 0$ pentru orice n și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci, oricare ar fi numărul întreg k (pozitiv sau negativ), șirul (a_n^k) este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k.$$

Dacă însă k este strict pozitiv, $k > 0$, egalitatea are loc chiar dacă termenii a_n și limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sînt egali cu 0.

Proprietatea de mai sus se enunță simplificat astfel:

Limita unei puteri (întregi) este egală cu puterea limitei

Să cercetăm acum dacă această proprietate rămîne adevărată și în cazul cînd exponentul nu mai este întreg, ci rațional oarecare. Reamintim că, pentru ca puterile a_n^r, cu exponent rațional r, să aibă sens (v. cap. I, § 2, nr. 4), va trebui să considerăm șiruri (a_n) cu $a_n \geqslant 0$ pentru exponent r strict pozitiv, și cu $a > 0$ pentru exponent r strict negativ sau 0.

Vom considera mai întîi cazul în care exponentul r este de forma $\frac{1}{k}$ unde k este număr natural.

T e o r e m ă. Dacă șirul (a_n) este convergent și dacă $a_n \geqslant 0$ pentru orice n, atunci șirul $(\sqrt[k]{a_n})$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{k}} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\frac{1}{k}}.$$

Să notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0$ (v. cap. III, § 3, nr. 4). Vom arăta că șirul $(\sqrt[k]{a_n})$ tinde către $\sqrt[k]{a}$. Să considerăm mai întîi cazul $a > 0$, deci $\sqrt[k]{a} > 0$. Să presupunem că $\sqrt[k]{a}$ nu ar fi limita șirului $(\sqrt[k]{a_n})$ și să arătăm că ajungem la o contradicție. Într-adevăr, dacă $\sqrt[k]{a}$ nu este limita șirului $(\sqrt[k]{a_n})$ se poate găsi cel puțin o vecinătate (α, β) a lui $\sqrt[k]{a}$ cu $\alpha > 0$, astfel încît în afara ei să se afle o infinitate de termeni $\sqrt[k]{a_n}$ (fig. 24); pentru acești termeni avem fie

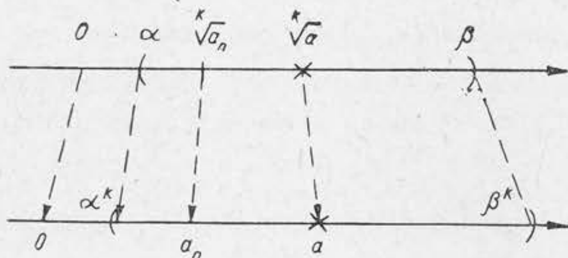


Fig. 24.

$\sqrt[k]{a_n} < \alpha$, fie $\beta < \sqrt[k]{a_n}$; deci, rezultă fie $a_n < \alpha^k$, fie $\beta^k < a_n$, pentru o infinitate de indici n. Dar, din $\alpha < \sqrt[k]{a} < \beta$ deducem $\alpha^k < a < \beta^k$, adică (α^k, β^k) este o vecinătate a lui a și în afara acestei vecinătăți se află o infinitate de termeni a_n, ceea ce contrazice ipoteza că a este limita șirului (a_n). Așadar, presupunerea că $\sqrt[k]{a}$ nu este limita șirului $(\sqrt[k]{a_n})$ ne duce la contradicție.

Urmează, deci, că $\sqrt[k]{a}$ este limita șirului $(\sqrt[k]{a_n})$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

În cazul cînd $a = 0$, atunci $\sqrt[k]{a} = 0$; raționamentul se face ca mai sus, ținînd seama că, dacă (α, β) este o vecinătate a lui 0, avem $\alpha < 0 < \beta$, deci $\alpha < 0 < \beta^k$. Pentru termenii $\sqrt[k]{a_n}$ dinafara acestei vecinătăți, avem $\beta \leqslant \sqrt[k]{a_n}$, deci $\beta^k \leqslant a_n$; prin urmare, dacă $\sqrt[k]{a_n}$ se află în afara vecinătății (α, β), atunci a_n se află în afara vecinătății (α, β^k) a lui 0 (fig. 25).

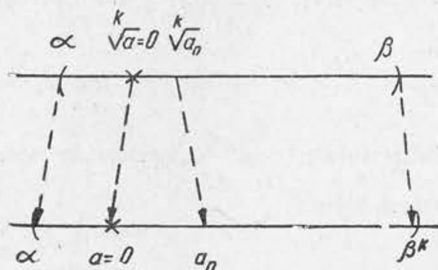


Fig. 25.

Teorema aceasta se enunță simplificat astfel:

Limita radicalului este egală cu radicalul limitei

Exemple:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{k}} = \left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{k}} = (e^{-1})^{\frac{1}{k}} = e^{-\frac{1}{k}}.$

Consecința 1. *Dacă (a_n) este un şir convergent de numere pozitive şi dacă $\frac{p}{q} > 0$, atunci şirul $\left(a_n^{\frac{p}{q}}\right)$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{p}{q}} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\frac{p}{q}}.$$

Într-adevăr, $a_n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a_n^p}$ deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{p}{q}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{\lim_{n\to\infty} a_n^p} = \sqrt[q]{(\lim_{n\to\infty} a_n)^p} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\frac{p}{q}},$$

Dacă $\frac{p}{q}$ este *negativ*, pentru ca puterile cu exponentul $\frac{p}{q}$ să aibă sens, trebuie să presupunem că baza este strict pozitivă. Deci:

Consecința 2. *Dacă (a_n) este un şir convergent de numere strict pozitive şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, atunci, oricare ar fi numărul raţional $\frac{p}{q}$* (pozitiv sau negativ), *şirul $\left(a_n^{\frac{p}{q}}\right)$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{p}{q}} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\frac{p}{q}}.$$

Dacă notăm $r = \frac{p}{q}$, egalitatea aceasta capătă aceeaşi formă ca şi pentru puteri întregi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r.$$

Rezultatele obţinute le putem enunţa acum într-o formă simplificată:

Limita unei puteri (raţionale) este egală cu puterea limitei

§ 2. PUTERI IRAŢIONALE

Fie $a > 0$. Se ştie ce înseamnă puterea $a^{\frac{p}{q}}$ cu exponent raţional $\frac{p}{q}$; $a^{\frac{p}{q}}$ este soluţia pozitivă — unică — a ecuaţiei:

$$x^q = a^p.$$

Ce înseamnă $a^{\sqrt{2}}$ şi, în general, a^α cu exponentul α iraţional?

Să considerăm numărul $\sqrt{2}$ ca fracţie zecimală, cu o infinitate de zecimale:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ \dots$$

Dacă păstrăm una, două, ..., n zecimale, obţinem un şir de numere raţionale, convergent către $\sqrt{2}$:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \dots$$

Acestea fiind numere raţionale, ştim ce înseamnă puterile lui a cu aceşti exponenţi:

$$a^{1,4},\quad a^{1,41},\quad a^{1,414},\quad a^{1,4142},\ \dots$$

Am obţinut astfel un şir de puteri raţionale ale lui a. Se poate arăta că acest şir este convergent. Limita acestui şir se notează $a^{\sqrt{2}}$ şi se spune că este puterea lui a cu exponentul $\sqrt{2}$.

În cazul general, dacă α este un număr iraţional, el se poate scrie sub formă de fracţie zecimală:

$$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Să notăm $r_1 = \alpha_0,\ \alpha_1$; $r_2 = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2$; $r_3 = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3$; ...

$$r_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n;\ \dots$$

Am obţinut un şir de numere raţionale:

$$r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n,\ \dots$$

care este convergent către α.

Considerăm apoi şirul puterilor lui a:

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ \dots,\ a^{r_n}, \dots$$

Se poate arăta că acest şir este convergent, dar demonstraţia depăşeşte cadrul manualului. Limita sa se notează a^α şi se spune că este puterea lui a cu exponentul α:

$$a^\alpha = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}.$$

Dacă ţinem seama că $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$, această egalitate se scrie:

$$a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Observaţie. Ca şi pentru puteri raţionale, baza unei puteri reale oarecare trebuie să fie strict pozitivă. Dacă exponentul α este strict pozitiv, baza poate fi şi zero: $0^\alpha = 0$.

Se arată că regulile de calcul pentru puterile cu exponent real (raţional sau iraţional) sînt aceleaşi ca şi pentru puterile cu exponent raţional. Se pot demonstra de asemenea următoarele proprietăţi (bazele puterilor fiind presupuse strict pozitive):

1) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n} = a^\alpha$.

Limita poate trece de la exponent la putere

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$.

2) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^\alpha = a^\alpha$.

Limita poate trece de la baza puterii la putere

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^\pi = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}\right)^\pi = 2^\pi$.

3) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n} = a^\alpha$.

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$.

§ 3. LOGARITMI

Să studiem acum ecuaţia $a^x = b$ şi să stabilim în ce condiţii are o singură soluţie (*pozitivă* sau *negativă*). În primul rînd, pentru ca a^x să aibă sens, trebuie ca $a > 0$ şi — deoarece, în acest caz, $a^x > 0$ — trebuie de asemenea să avem $b > 0$.

1) Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, ecuația nu are nici o soluție, deoarece, oricare ar fi $x > 0$, avem $0^x = 0 \neq b$.

2) Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ecuația are ca soluție orice număr $x > 0$.

3) Dacă $a = 1$ și $b \neq 1$, ecuația nu are nici o soluție, deoarece, oricare ar fi x, avem $1^x = 1 \neq b$.

4) Dacă $a = 1$ și $b = 1$, ecuația are ca soluție orice număr x.

Rămîne deci de studiat cazul cînd a este strict pozitiv și diferit de 1 și $b > 0$. Se poate arăta că, *în acest caz, ecuația $a^x = b$ are o singură soluție, care poate fi număr negativ sau pozitiv (în particular 0)*. Soluția ecuației $a^x = b$ se notează $\log_a b$ și se numește *„logaritmul în baza a al lui b"*. Așadar:

$$x = \log_a b \text{ este echivalent cu } a^x = b$$

sau

$$a^{\log_a b} = b.$$

Numărul a se numește baza logaritmului. Trebuie observat că:

— baza unui logaritm este un număr *strict pozitiv și diferit de* 1;

— numai numerele $b > 0$ au logaritmi.

Din definiția logaritmilor se deduc proprietățile lor:

1) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a 1 = 0$;

3) $\log_a a^b = b$ și $a^{\log_a b} = b$;

4) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

5) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

6) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ (oricare ar fi α real);

7) dacă $a > 0$, $b > 0$ și $a \neq 1$, $b \neq 1$, atunci

$$\boxed{\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c}$$

(formula de schimbare a bazei logaritmilor).

Într-adevăr, să notăm $\log_a b = x$, deci $a^x = b$, și $\log_b c = y$, deci $b^y = c$.

Atunci, $a^{xy} = b^y = c$, deci $\log_a c = xy = \log_a b \cdot \log_b c$.

În particular, luînd $c = a$, avem $\log_a c = 1$, deci:

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}$$

Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni* (de la numele matematicianului Neper). În loc de $\log_e b$ se scrie $\ln b$.

Logaritmii în baza 10 se numesc *logaritmii zecimali*. În loc de $\log_{10} b$ se scrie $\lg b$.

EXERCIŢII

Să se determine limita următoarelor şiruri:

1. $a_n = \dfrac{7n^2 - \sqrt{5n^3 + 5n}}{2n^2 - n + 1}$;

2. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2 - 3n + 4}}{n + 7}$;

3. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3 + n} - n}$;

4. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 7n + 13}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 2n}}$;

5. $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}}$;

6. $a_n = e^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2-n+1}}$;

7. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{9n+5}\right)^{\frac{n^2-2n+1}{2n^3-7}}$;

8. $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{1 + 3n^2}}{7n^2 - 2}\right)^{\frac{\sqrt[3]{n^3+2n}}{3n-5}}$.

CAPITOLUL V

SIMBOLURILE $+\infty$ ŞI $-\infty$

§ 1. SIMBOLUL $+\infty$

Reamintim că şirurile convergente au fost definite prin proprietatea că în afara unor anumite *intervale* (vecinătăţile limitei) se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Să considerăm acum şirul numerelor naturale

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Acest şir este divergent (fiind nemărginit), dar are o proprietate asemănătoare cu aceea a şirurilor convergente, şi anume: în afara unor anumite intervale se află cel mult un număr finit de termeni ai acestui şir. Mai precis:

În afara fiecărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului numerelor naturale.

Într-adevăr oricare ar fi a, există un număr natural $N > a$, deci pentru orice număr natural $n \geqslant N$, avem de asemenea $n > a$, adică $n \in (a, +\infty)$. În afara semidreptei $(a, +\infty)$, şi anume la stînga ei, se află cel mult termenii $1, 2, 3, \ldots, N-1$, în număr finit (fig. 26).

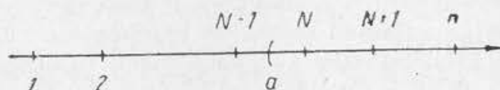


Fig. 26

Datorită acestei analogii s-a convenit să se spună că şirul (n) al numerelor naturale are limită, iar acestei limite i s-a atribuit un simbol, $+\infty$ (plus infinit) şi se scrie $n \to +\infty$. Se va arăta mai jos că se pot efectua cu $+\infty$, ca şi cu numerele, anumite operaţii; de aceea $+\infty$ este numit *număr infinit*, spre deosebire de numerele propriu-zise, care sînt numite *numere finite* sau pur şi simplu numere.

S-a convenit ca semidreptele $(a, +\infty)$ să fie numite *vecinătăţi ale lui* $+\infty$. Cu această denumire, proprietatea şirului numerelor naturale pusă în evidenţă mai sus se enunţă astfel:

În afara fiecărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului (n).

În cazul altor șiruri, proprietatea aceasta s-a adoptat ca definiție:

Definiție. Se spune că un șir (a_n) are limita $+\infty$, dacă în afara fiecărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sau $a_n \to +\infty$.

Aceasta înseamnă că, oricît de mare ar fi numărul $A > 0$, el este întrecut de toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei.

Pentru a distinge șirurile care au limita finită de cele care au limita $+\infty$, vom numi în continuare șiruri convergente numai șirurile care au limita finită.

Dispunem și pentru șirurile cu limita $+\infty$ de un criteriu asemănător criteriului de la șiruri convergente.

Criteriu. Dacă $a_n \geqslant b_n$ pentru orice n și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

De asemenea, șirurile monotone au o proprietate analogă aceleia a șirurilor convergente:

Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.

S-a adoptat convenția: $\boxed{a < +\infty}$

oricare ar fi numărul real a. Folosind această convenție, deducem că termenii unui șir crescător și nemărginit sînt mai mici decît limita $+\infty$ a șirului. Ținînd seama de teorema din cap. III, § 2, nr. 5, se poate da o formulare unitară asupra șirurilor crescătoare, fie mărginite, fie nemărginite, și anume:

Orice șir crescător are limită și limita sa este mai mare decît termenii șirului.

Observație. Din convenția de mai sus rezultă în particular $0 < +\infty$, ceea ce îndreptățește să se scrie ∞ în loc de $+\infty$, după cum se scrie, de exemplu, 5 sau $\frac{7}{3}$ în loc de $+5$ sau $+\frac{7}{3}$. Urmează că, în loc de $x_n \to +\infty$, se poate scrie $x_n \to \infty$, iar semidreptele $(a, +\infty)$ și $[a, +\infty)$ se pot scrie (a, ∞), respectiv $[a, \infty)$.

Exemple de șiruri cu limita ∞:

1) $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, deoarece $n^2 > n$ (v. criteriul).

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ (k natural), deoarece șirul $\sqrt[k]{1}, \sqrt[k]{2}, \ldots, \sqrt[k]{n}, \ldots$ este crescător și nemărginit.

3) Dacă $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, deoarece șirul $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ este crescător și nemărginit (v. § 1, nr. 3). În particular, $\lim_{n\to\infty} 10^n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

§ 2. SIMBOLUL — ∞

Să considerăm șirul numerelor întregi strict negative

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

Acest șir este divergent (fiind nemărginit), dar are și el o proprietate asemănătoare cu aceea a șirurilor convergente, și anume:

În afara fiecărei semidrepte $(-\infty, a)$ *se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului* (demonstrația este analogă aceleia de la § 1).

Datorită acestei analogii s-a convenit să se spună că șirul $(-n)$ are limită, iar acestei limite i s-a atribuit un simbol, $-\infty$ (minus infinit); $-\infty$ este numit număr infinit, ca și $+\infty$.

S-a convenit ca semidreptele $(-\infty, a)$ să fie numite vecinătăți ale lui $-\infty$; atunci, proprietatea de mai sus a șirului $(-n)$ se formulează astfel:

În afara fiecărei vecinătăți a lui $-\infty$ *se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului* $(-n)$.

În cazul altor șiruri, proprietatea aceasta s-a adoptat ca definiție:

D e f i n i ț i e. Se spune că un șir (a_n) are limita $-\infty$, dacă în afara fiecărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Se scrie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ sau $a_n \to -\infty$.

Aceasta înseamnă că, oricît de mare ar fi numărul $A > 0$, toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei, sînt mai mici decît $-A$.

Ținînd seama de definiția 1 a limitei unui șir convergent (v. cap. III, § 2, nr. 2) și de definițiile de la § 1 și § 2 din acest capitol, se constată că formularea definiției limitei unui șir este aceeași, fie că limita este finită, fie că este infinită.

Semnalăm următoarele proprietăţi:

Criteriu. Dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice n şi $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Orice şir descrescător şi nemărginit are limita $-\infty$.

S-a adoptat convenţia: $\boxed{-\infty < a}$

oricare ar fi numărul real a. Ţinînd seama de teorema din cap. III, nr. 5, se poate da o formulare unitară asupra şirurilor descrescătoare, fie mărginite, fie nemărginite, şi anume:

Orice şir descrescător are limită şi limita este mai mică decît termenii şirului.

Observaţii. 1° Din convenţia de mai sus rezultă $-\infty < 0$.

2° Deoarece $-\infty < a$ şi $a < \infty$, pentru a extinde proprietatea de tranzitivitate a relaţiei de ordine şi la numerele infinite, s-a adoptat convenţia:

$$\boxed{-\infty < \infty}$$

Exemple de şiruri cu limita $-\infty$:

1) $\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$, deoarece $-n^2 < -n$ (v. criteriul).

2) $\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt[k]{n}\right) = -\infty$ (k natural), deoarece şirul

$$-\sqrt[k]{1}, -\sqrt[k]{2}, -\sqrt[k]{3}, \ldots, -\sqrt[k]{n}, \ldots$$

este descrescător şi nemărginit.

§ 3. OPERAŢII CU $+\infty$ ŞI $-\infty$

1. Suma

Se poate demonstra următoarea proprietate:

1) *Dacă şirul (a_n) este convergent şi are limita a, iar şirul (b_n) are limita ∞, atunci şirul $(a_n + b_n)$ are limita ∞.*

Exemplu: $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, $b_n = n$, $a_n + b_n = \dfrac{n^2+n-1}{n}$.

Avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

S-a arătat (v. cap. III, § 3) că, pentru două șiruri convergente, limita sumei este egală cu suma limitelor. Pentru a putea afirma și în cazul proprietății de mai sus că limita sumei (∞) este egală cu suma limitelor ($a + \infty$), s-a adoptat convenția:

$$\boxed{a + \infty = \infty}$$

(oricare ar fi numărul real a).

Se pot demonstra de asemenea următoarele proprietăți:

2) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

3) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (a finit) *și* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

4) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că limita sumei este egală cu suma limitelor, s-au adoptat convențiile:

$$\boxed{\infty + \infty = \infty} \qquad \boxed{a + (-\infty) = -\infty} \qquad \boxed{-\infty + (-\infty) = -\infty}$$

În loc de $a + (-\infty)$ se scrie $a - \infty$; iar în loc de $-\infty + (-\infty)$ se scrie $-\infty - \infty$.

Observație. Nu se atribuie nici un sens operației $\infty + (-\infty)$ (sau $\infty - \infty$), deoarece, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, despre șirul $(a_n + b_n)$ nu se poate afirma nimic: în unele cazuri $(a_n + b_n)$ este convergent, în alte cazuri are limita $+\infty$ sau $-\infty$ și în alte cazuri nu are limită.

Exemplu:

(a_n): 2, 2, 4, 4, ..., $2n$, $2n$, ..., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

(b_n): -1, -2, -3, -4, ..., $-2n+1$, $-2n$, ..., $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$,

$(a_n + b_n)$: 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...; nu are limită.

Ținînd seama de teorema asupra sumei a două șiruri convergente (cap. III, § 3) și de propr. 1) — 4) de mai sus, se poate da următoarea formulare unitară:

> **Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au limită (finită sau infinită) și dacă suma limitelor are sens, atunci șirul $(a_n + b_n)$ are limită și limita sumei este egală cu suma limitelor**

Cazul exceptat: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

2. Produsul

Urmînd aceeași cale ca la nr. 1, pentru a putea afirma că limita produsului este egală cu produsul limitelor și în cazurile cînd unul sau ambele șiruri au limită infinită, s-au adoptat următoarele convenții:

$\boxed{a \cdot \infty = \infty}$ și $\boxed{a \cdot (-\infty) = -\infty}$ dacă $a > 0$

$\boxed{a \cdot \infty = -\infty}$ și $\boxed{a \cdot (-\infty) = \infty}$ dacă $a < 0$

$\boxed{\infty \cdot \infty = \infty}$, $\boxed{(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty}$, $\boxed{\infty \cdot (-\infty) = -\infty}$

Observație. Operațiilor $0 \cdot \infty$ *și* $0\,(-\infty)$ *nu li se atribuie nici un sens*, deoarece, dacă $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$ (sau $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$), despre șirul $(a_n b_n)$ nu se poate afirma nimic: în unele cazuri poate fi convergent, în alte cazuri poate avea limita $+\infty$ sau $-\infty$, iar în alte cazuri poate să nu aibă limită.

Exemplu

$(a_n): \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots, \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

$(b_n): 2, 6, 4, \ldots 4n-2, 2n, \ldots, \lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$

$(a_n b_n): 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots$; nu are limită.

Ca și la nr. 1, se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au limită (finită sau infinită) și dacă produsul limitelor are sens, atunci șirul $(a_n\, b_n)$ are limită și limita produsului este egală cu produsul limitelor

Cazuri exceptate: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$.

Fiecare din aceste cazuri se desemnează prin $0 \cdot \infty$.

3. Cîtul

Ca și la nr. 1 și nr. 2, pentru a putea afirma că limita cîtului este egală cu cîtul limitelor și în cazul cînd limita numitorului este infinită, s-au adoptat următoarele convenții :

$$\boxed{\frac{a}{\infty} = 0} \quad \text{și} \quad \boxed{\frac{a}{-\infty} = 0}$$

oricare ar fi numărul real a.

Observație. În cazul cînd ambele limite sînt infinite, despre șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se poate afirma nimic. În unele cazuri, șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ poate fi convergent, în alte cazuri poate avea limita $+\infty$ sau $-\infty$ și, în alte cazuri, poate să nu aibă limită. De aceea se spune că *operațiile* $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ *nu au sens.*

Exemple :

(a_n) : 2, 2, 6, 4, ..., $4n-2$, $2n$, ..., $a_n \to +\infty$,

(b_n) : 1, 2, 3, 4, ..., $2n-1$, $2n$, ..., $b_n \to +\infty$,

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$: 2, 1, 2, 1, ..., 2, 1, ... nu are limită.

Reamintim că altă operație fără sens este împărțirea cu 0 și că, în cazul cînd limita de la numitor este 0, șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ poate să nu aibă limită (v. cap. III, § 3).

Ca și la nr. 1 și nr. 2, se poate da acum următoarea formulare unitară :

> **Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au limită (finită sau infinită) și dacă raportul limitelor are sens, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită, și limita cîtului este egală cu cîtul limitelor**

Cazuri exceptate : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, cazuri desemnate prin : $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ sau, pe scurt, cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

În ceea ce priveşte operaţia fără sens $\frac{1}{0}$, se pot face unele precizări:

1) *Dacă* $a_n > 0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

2) *Dacă* $a_n < 0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Rezultă că, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ şi deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

4. Puteri

În capitolul IV s-a afirmat că se poate demonstra că dacă $a_n \to a$ ($a_n > 0$ $a > 0$) şi $b_n \to b$, atunci:

$$a_n^{b_n} \to a^b.$$

Dacă, în plus, $b > 0$, atunci şi în cazul $a = 0$ avem:

$$a_n^{b_n} \to a^b = 0^b = 0.$$

Dacă, însă, $a = 0$ şi $b = 0$, despre şirul $(a_n^{b_n})$ nu se poate afirma nimic, după cum se va arăta mai jos prin exemple. *Operaţia* 0^0 *nu are sens.*

Pentru ca regula de mai sus să rămînă adevărată şi în cazul cînd una sau ambele limite sînt infinite, s-au adoptat convenţiile:

Dacă $a > 1$: $\boxed{a^{\infty} = \infty}$ şi $\boxed{a^{-\infty} = 0}$

Dacă $0 < a < 1$: $\boxed{a^{\infty} = 0}$ şi $\boxed{a^{-\infty} = \infty}$

Dacă $a > 0$: $\boxed{\infty^a = \infty}$

Dacă $a < 0$: $\boxed{\infty^a = 0}$

$\boxed{0^{\infty} = 0}$, $\boxed{\infty^{\infty} = \infty}$, $\boxed{\infty^{-\infty} = 0}$

Nu se acordă nici un sens operaţiilor 1^{∞}, 0^0 şi ∞^0, deoarece, în aceste cazuri, despre şirul $(a_n^{b_n})$ nu se poate afirma nimic. Uneori, acest şir are limită, finită sau $+\infty$, alteori nu are limită.

Exemple:

C a z u l 1^∞: $a_n = e^{(-1)^n \cdot \frac{1}{2}}$, $b_n = n$, $a_n^{b_n} = e^{(-1)^n}$, adică

$$\frac{1}{e},\ e,\ \frac{1}{e},\ e,\ \ldots$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dar șirul $a_n^{b_n}$ nu are limită.

C a z u l 0^0: $a_n = e^{-n}$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n^{b_n} = e^{(-1)^{n+1}}$, adică

$$e,\ \frac{1}{e},\ e,\ \frac{1}{e},\ \ldots$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dar șirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ nu are limită.

C a z u l ∞^0: $a_n = e^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n^{b_n} = e^{(-1)^n}$, adică

$$\frac{1}{e},\ e,\ \frac{1}{e},\ e,\ \ldots$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e\ \infty = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dar șirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ nu are limită.

Ca și la nr. 1, nr. 2 și nr. 3, se poate da acum următoarea formulare unitară:

> **Dacă $a_n^{b_n}$ are sens pentru orice n, dacă $a_n \to a$ și $b_n \to b$ (a și b finite sau infinite) și dacă a^b are sens, atunci șirul $a_n^{b_n}$ are limita a^b.**

Cazuri exceptate:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ (c a z u l 1^∞),

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (c a z u l 0^0),

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (c a z u l ∞^0).

Tabloul operațiilor fără sens (recapitulare)

> **pentru adunare:** $\infty - \infty$
> **pentru înmulțire:** $0 \cdot \infty$ și $0 \cdot (-\infty)$
> **pentru împărțire:** $\frac{a}{0}$ $\left(\text{în particular } \frac{0}{0}\right)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$
> **pentru puteri:** $1^\infty, 0^0, \infty^0$

EXERCIŢII

Să se determine limita următoarelor şiruri:

1. $a_n = 2n^3 - n^2 + 1.$

2. $a_n = 1 + 3n - n^7.$

3. $a_n = -5n^9 + n^2 - 3n.$

4. $a_n = \dfrac{5n^4 - 2}{n^2 + n + 1}.$

5. $a_n = \dfrac{3 - 7n - n^4}{2n + 9}.$

6. $a_n = \dfrac{(2 - 3n)(n + 7)(1 - n^2)}{n^2 + 25}.$

7. $a_n = \sqrt[3]{2n^2 + 5}.$

8. $a_n = -\sqrt[5]{n^3 + 2}.$

9. $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$

10. $a_n = n\,(\sqrt{n^2 + 1} - n).$

11. $a_n = \sqrt{5n^2 + 1} - n.$

12. $a_n = n + 1 - \sqrt{2n^2 + 3}.$

13. $a_n = \alpha^{\frac{n^2 - n + 1}{2n + 3}} \quad (\alpha > 1).$

14. $a_n = \beta^{\frac{n^3 - 2}{\sqrt{n^2 + 1}}} \quad (0 < \beta < 1).$

15. $a_n = e^{\frac{\sqrt[3]{n^4 + 5}}{n^2 - 1}}.$

16. $a_n = e^{-\frac{\sqrt{2 + 3n^6}}{n^2 + n}}$

CAPITOLUL VI

FUNCŢII

§ 1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

1. Exemple de funcţii

Una din noţiunile fundamentale ale analizei matematice este aceea de funcţie. Această noţiune este rezultatul unui îndelungat proces de abstractizare — etapă importantă a procesului de cunoaştere — în străduinţa oamenilor de a obţine o descriere cît mai exactă, mai ştiinţifică a fenomenelor din natură.

Să dăm cîteva exemple:

1) Să considerăm un mobil care se deplasează într-un singur sens pe o dreaptă începînd dintr-un punct 0 (fig. 27). Să măsurăm cu o anumită unitate de lungime, de exemplu cu metrul, distanţa dintre mobil şi punctul 0 în diferite momente: după o secundă, după două secunde ş.a.m.d. Se obţin distanţele s_1, s_2 ş.a.m.d. Fiecărui moment t îi *corespunde* o anumită distanţă s. În general, diferitelor momente t', t'' le corespund distanţe diferite s', s''. Cunoaştem mişcarea mobilului dacă în fiecare moment t cunoaştem distanţa *corespunzătoare* s. Aşadar, mişcarea mobilului este caracterizată prin *corespondenţa* dintre mulţimea momentelor t şi mulţimea distanţelor s.

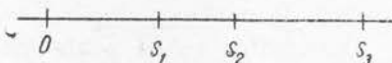


Fig. 27

Distanţa s la un anumit moment t *depinde* de t. Se spune că distanţa parcursă de mobil este *funcţie* de timp.

2) Să considerăm un gaz închis într-un cilindru cu piston. Dacă exercităm o presiune asupra pistonului, volumul gazului se modifică. Astfel, la diferite presiuni, P_1, P_2, ..., P_n, gazul va avea diferite volume, V_1, V_2, ..., V_n. Fiecărei presiuni P îi *corespunde* un volum V. Proprietatea de

elasticitate a gazului este caracterizată de *corespondența* dintre mulțimea valorilor pe care le ia presiunea și mulțimea valorilor pe care le ia volumul. Se spune că volumul gazului este *funcție* de presiunea exercitată.

3) Să considerăm un curent electric care trece printr-o rezistență. Curentul are o tensiune V și o intensitate I. Dacă se modifică tensiunea curentului, se modifică și intensitatea sa. Pentru diferite tensiuni V_1, V_2, ..., V_n obținem diferite intensități I_1, I_2, ..., I_n. Fiecărei valori V a tensiunii îi *corespunde* o anumită valoare I a intensității. Modul în care variază curentul electric este caracterizat de *corespondența* dintre mulțimea valorilor pe care le ia tensiunea și mulțimea valorilor pe care le ia intensitatea. Spunem că intensitatea curentului este *funcție* de tensiunea sa.

4) Se știe că aria A a cercului de rază R este πR^2.

$$A = \pi R^2.$$

Două cercuri de raze diferite au arii diferite. Aria A a cercului *depinde* de raza sa R, adică unei anumite raze îi *corespunde* o anumită arie. Egalitatea de mai sus caracterizează *corespondența* dintre mulțimea razelor și mulțimea ariilor. Se spune că aria unui cerc este *funcție* de raza sa.

Raza cercului este un număr *pozitiv* oarecare și aria corespunzătoare este de asemenea un număr pozitiv, astfel încît, în fapt, corespondența dintre raze și arii este o corespondență între mulțimea valorilor pe care le ia raza, anume $[0, +\infty)$, și mulțimea valorilor corespunzătoare ale ariei, de asemenea $[0, +\infty)$.

2. Definiția funcției

Exemple de corespondențe (sau funcții) de felul celor de mai sus se pot da oricît de multe.

Matematica nu se poate însă limita la studierea unor corespondențe particulare, așa cum intervin ele, de exemplu, în fizică sau în chimie, ci studiază dintr-un punct de vedere general toate aceste corespondențe, pentru ca rezultatele obținute să poată fi apoi folosite de celelalte științe, conform specificului fiecăreia. Pentru a face acest studiu general, matematica cercetează corespondențele care se pot stabili între două *mulțimi oarecare*. În mod special interesează corespondențele între două *mulțimi de numere*.

Definiție. Dacă fiecărui element x dintr-o mulțime E facem să-i corespundă — printr-un anumit procedeu — un anumit element y dintr-o mulțime F (și numai unul), corespondența dintre elementele mulțimii E și cele ale lui F se numește funcție.

O funcție se notează printr-o literă, de exemplu f (se pot întrebuința și alte litere g, h, F, φ, ψ etc.).

Mulțimea E se numește *mulțimea de definiție* a funcției f sau *domeniul de definiție* al funcției f.

Dacă a este un element din E și dacă lui a îi corespunde elementul b din F, se spune că b este *imaginea lui a* prin funcția f sau că b este *valoarea funcției f în a* și se mai notează $f(a)$ (se citește „f de a"):

$$b = f(a).$$

Se spune, de asemenea, că b se obține *aplicînd pe f lui a*.

Așadar, valoarea $f(a)$ a funcției f în a este un element din F. De aceea F se numește *mulțimea în care funcția f ia valori*.

Dacă x este un element *oarecare* din E, căruia îi corespunde prin f elementul y din F, *în loc de y este valoarea lui f în x* ($y = f(x)$) se mai spune uneori y este funcție de x, în sensul că y depinde de x.

Se spune că *f este o funcție definită pe E, cu valori în F*.

Noțiunea de funcție comportă, deci, trei elemente: o mulțime de definiție E, o mulțime F, în care funcția ia valori, și o corespondență între elementele primei mulțimi și o parte din elementele celeilalte mulțimi (eventual toate).

Exemple:

1) Fie E o mulțime formată din trei cărți: a, b, c. Să presupunem că, de exemplu, cartea a costă 5 lei, cartea b costă 3 lei și cartea c costă 5 lei. Putem face să corespundă fiecărei cărți prețul ei; obținem astfel o funcție f. Corespondența stabilită de această funcție este indicată în figura 28 prin săgeți. Avem:

$$f(a) = 5, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 5.$$

Așadar, valoarea funcției f în a este 5; valoarea funcției f în b este 3; valoarea funcției f în c este 5.

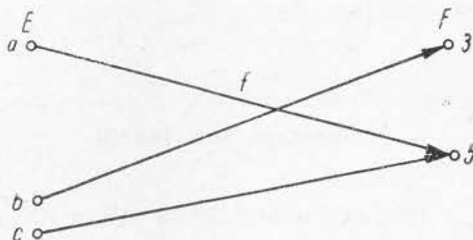


Fig. 28

Din acest exemplu se constată că pot exista elemente din F care să corespundă mai multor elemente din E. Astfel 5 corespunde și lui a și lui c; $f(a) = f(c) = 5$.

2) Fie E intervalul închis $[-1, 1]$. Să facem că corespundă fiecărui număr $x \in [-1, 1]$ pătratul său x^2. Am obținut astfel o funcție f a cărei valoare $f(x)$ într-un punct x din E este x^2:

$$f(x) = x^2; \quad x \in [-1, 1].$$

Astfel $f(-1) = 1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $f(1) = 1$.

Și aici se constată că funcția poate avea aceeași valoare în puncte diferite.

Astfel $f(-1) = f(1) = 1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; în general, $f(-x) = f(x) = x^2$.

Două funcţii f şi g se consideră *egale* dacă, şi numai dacă, au acelaşi domeniu de definiţie şi dacă stabilesc aceeaşi corespondenţă.

Rezultă că două funcţii care au domenii de definiţie diferite nu sînt egale. De asemenea, dacă două funcţii f şi g au acelaşi domeniu de definiţie E, dar au valori diferite *cel puţin* pentru un element $a \in E$, $f(a) \neq g(a)$, atunci f şi g nu sînt egale.

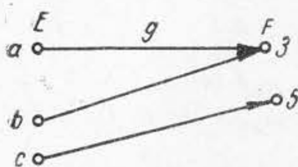


Fig. 29

Exemple:

1) Presupunînd în exemplul 1) de mai sus că s-a ieftinit cartea a şi costă numai 3 lei, celelalte cărţi avînd acelaşi preţ ca mai înainte, se obţine o altă funcţie, g. Corespondenţa stabilită de această funcţie este indicată în figura 29. Funcţiile f şi g din figura 28 şi figura 29 au acelaşi domeniu de definiţie E, dar nu sînt egale, deoarece au valori diferite în a:

$$f(a) = 5 \text{ şi } g(a) = 3, \text{ deci } f(a) \neq g(a).$$

2) Fie E' intervalul închis $[0, 2]$ şi fie g funcţia care face să corespundă fiecărui număr $x \in [0, 2]$ pătratul său x^2:

$$g(x) = x^2, \quad x \in [0, 2].$$

Funcţia g din acest exemplu şi funcţia $f(x) = x^2$ pentru $x \in [-1, 1]$, considerată mai înainte, nu sînt egale, deoarece au domenii de definiţie diferite, deşi pentru punctele din $[0, 1]$, comune celor două domenii de definiţie, ele au aceleaşi valori:

$$f(x) = g(x), \quad x \in [0, 1].$$

3. Argumentul unei funcţii

Fie f o funcţie definită pe o mulţime E, cu valori într-o mulţime F. Dacă se notează cu x un element *oarecare* (arbitrar) din mulţimea de definiţie E, x se numeşte *argumentul funcţiei* f (sau variabila independentă a funcţiei f). Pentru a pune în evidenţă argumentul x al funcţiei f, se va nota de multe ori această funcţie cu $f(x)$, în loc de f*.

Argumentul unei funcţii se poate nota şi cu alte litere, de exemplu: t, y, z, u, v, etc.

---

* De fapt, pentru a pune în evidenţă argumentul x, funcţia ar trebui notată $x \to f(x)$, $x \in E$, ceea ce ar complica scrierea.

4. Funcții reale de o variabilă reală

În restul manualului vor fi considerate numai funcții cu valori numere reale (deci mulțimea F în care funcțiile iau valori este R) și definite pe mulțimi de numere reale. *Mulțimea de definiție trebuie specificată de fiecare dată.*

Astfel de funcții se numesc *funcții reale de o variabilă reală.* Aceste funcții sînt *definite numai pentru numere finite* și au totdeauna *valori finite.*

Dat fiind că toate funcțiile care vor fi întîlnite mai departe sînt funcții reale de variabilă reală, ele vor fi numite, mai simplu, funcții (fără altă specificație).

5. Graficul unei funcții

Fie f o funcție definită pe o mulțime de numere E. Fiecărui număr $x \in E$ îi corespunde imaginea sa $f(x)$ prin funcția f. Putem forma perechi de numere de forma $(x, f(x))$, unde primul număr, x, este din E, iar al doilea număr, $f(x)$, este valoarea funcției f în x. O asemenea pereche de numere reprezintă *un punct în plan.* Toate punctele din plan de forma $(x, f(x))$ cu $x \in E$ formează o *mulțime de puncte* care se numește *graficul funcției* f (sau curba reprezentativă a funcției f).

Este foarte util ca, ori de cîte ori este posibil, să trasăm graficul unei funcții, deoarece pe acest grafic se pot citi ușor unele proprietăți ale funcției.

Exemple:

1) Fie funcția $f(x) = x^2$ definită pentru $x \in [-1, 1]$. Să găsim cîteva puncte ale graficului corespunzătoare unor valori ale lui x:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1

Am obținut astfel următoarele puncte ale graficului lui f:

$$(-1, 1), \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right),$$

$$(0, 0), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right), (1, 1),$$

pe care le-am reprezentat în figura 30. Unind aceste puncte printr-o linie curbă obținem cu aproximație graficul funcției f. Dacă dorim să trasăm graficul cu precizie mai mare, trebuie

să mai găsim şi alte puncte $(x, f(x))$ ale sale, dînd lui x mai multe valori. Spunem că am construit graficul funcţiei f *prin puncte*.

2) Fie funcţia $g(x) = x^2$ definită pentru $x \in [0, 2]$. Să construim graficul acestei funcţii prin puncte. Pentru aceasta, formăm următorul tabel:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

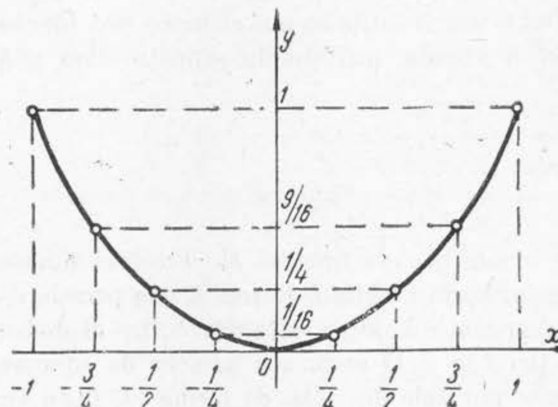


Fig. 30

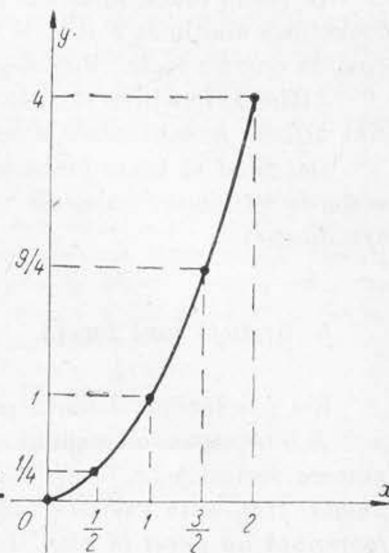


Fig. 31

Am obţinut astfel următoarele puncte ale graficului lui g:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1, 1), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), (2, 4),$$

pe care le-am reprezentat în figura 31. Unind aceste puncte, se obţine cu aproximaţie graficul funcţiei g.

Observaţii. 1° Ţinînd seamă de modul în care a fost definită mai înainte egalitatea a două funcţii, rezultă că două funcţii sînt egale, dacă, şi numai dacă, au acelaşi grafic.

În exemplele 1) şi 2) de mai sus, funcţiile f şi g sînt diferite, pentru că au domenii de definiţie diferite, ceea ce se vede uşor pe graficele celor două funcţii.

2° Fie f o funcţie definită pe o mulţime de numere E. Graficul său este format din acele puncte (x, y) din plan pentru care ordonata y este valoarea funcţiei f în $x \in E$, deci care verifică ecuaţia:

$$y = f(x), \quad x \in E.$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia graficului* funcţiei f.

Exemple:

1) $y = x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

este ecuaţia graficului funcţiei f din exemplul 1) de mai sus.

2) $y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

este ecuaţia graficului funcţiei g din exemplul 2) de mai sus.

3) $y = ax + b, \quad x \in R$

este ecuaţia graficului funcţiei $f(x) = ax + b$ definită pe R; după cum se ştie din clasele precedente, acest grafic este o dreaptă, deci $y = ax + b$ este ecuaţia unei drepte.

4) $y = ax^2 + bx + c, \quad x \in R$

este ecuaţia unei parabole, care este graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ definită pe R.

6. Cîteva moduri de a defini funcţii

a) În mod frecvent, se întîlnesc funcţii care stabilesc corespondenţa $x \to f(x)$ aplicînd succesiv argumentului x cel mult de un număr finit de ori: operaţiile algebrice (adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea), ridicarea lui x la o putere cu exponent oarecare, ridicarea unei baze oarecare la o putere cu exponent x (exponenţierea), logaritmarea, precum şi sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Exemple:

1) $f(x) = \dfrac{x^5 + 3}{2x^2 + 1}$, definită pentru $x \in R$.

2) $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 3}$, definită pentru $x \in R$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, definită pentru $x \in R - \{1\}$.

4) $f(x) = \ln(x + 1)$, definită pentru $x \in (-1, +\infty)$.

5) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, definită pentru $x \in [0, +\infty)$.

6) $f(x) = 2 \sin \dfrac{x + e^x}{\sqrt{x} - 2}$, definită pentru $x \in [0, \infty) - \{4\}$.

Observaţie. La toate aceste funcţii s-a luat ca domeniu de definiţie mulţimea tuturor punctelor x pentru care operaţiile respective au sens. Desigur, aceste funcţii pot fi definite şi pe mulţimi mai restrînse. Dacă nu se specifică domeniul de definiţie al unei astfel de funcţii, se subînţelege că *domeniul său de definiţie este format din toate punctele pentru care operaţiile respective au sens.* Acesta este *domeniul maxim* pe care poate fi definită funcţia.

b) Se pot considera *funcţii care sînt definite pe o reuniune de intervale,* anume în moduri diferite pe fiecare interval în parte.

Exemple:

1) Să considerăm un vas cilindro-conic, cu dimensiunile indicate în figura 32. Să se stabilească raza R a secţiunii plane paralelă cu baza cilindrului, în funcţie de distanţa x de la vîrful conului.

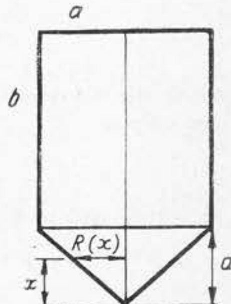


Fig. 32

Se observă că:

$$R(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant a \\ a, \text{ dacă } a \leqslant x \leqslant a + b. \end{cases}$$

Domeniul de definiţie al funcţiei $R(x)$ este $[0, a + b]$.

De exemplu, $R\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$, $R\left(a + \frac{b}{2}\right) = a$. Evident, pentru x în afara domeniului de definiţie ($x < 0$ sau $x > a + b$), nu mai are sens să vorbim de raza secţiunii plane; pentru aceste valori, funcţia $R(x)$ nu este definită.

2) $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ pentru } x \leqslant 0, \ x \in (-\infty, 0] \\ x \text{ pentru } x > 0, \ x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Această funcţie se poate scrie sub forma:

$$f(x) = |x|, \text{ pentru } x \in R$$

sau:

$$f(x) = \sqrt{x^2}, \text{ pentru } x \in R.$$

3) $$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 \text{ pentru } -3 < x \leqslant 2, \ x \in (-3, 2] \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \text{ pentru } 2 < x \leqslant 5, \ x \in (2, 5]. \end{cases}$$

Această funcţie este definită pe $(-3, 2] \cup (2, 5] = (-3, 5]$. De exemplu, $f(-1) = 1$; $f(0) = 2$; $f(1) = 3$; $f(3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $f(4) = \frac{2}{5}$. Pentru $x \leqslant -3$, sau $x > 5$, $f(x)$ nu mai are sens.

4) $$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{ pentru } x \in (-1, 0) \\ 5, \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ e^{x^2}, \text{ pentru } x \in [5, 7]. \end{cases}$$

Această funcţie este definită pe mulţimea

$$(-1, 0) \cup [0, 1) \cup [5, 7] = (-1, 1) \cup [5, 7].$$

De exemplu,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^2}; \ f(0) = 5; \ f(6) = e^{36}.$$

Observaţie. Domeniul de definiţie al unei funcţii nu este totdeauna un interval. În ultimul exemplu, domeniul de definiţie este format din reuniunea a două intervale disjuncte: $(-1, 1) \cup [5, 7]$.

c) Un exemplu deosebit de cele precedente îl constituie aşa-numita funcţie a lui Dirichlet :

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.}\end{cases}$$

Această funcţie este definită pe toată dreapta.

Să observăm că nu putem trasa graficul acestei funcţii, dar, fiind dată o valoare a lui x, putem găsi punctul corespunzător $(x, f(x))$ al graficului. De exemplu, pentru $x=\sqrt{2}$ obţinem punctul $(\sqrt{2}, 0)$; pentru $x=\frac{7}{4}$ obţinem punctul $\left(\frac{7}{4}, 1\right)$ (fig. 33).

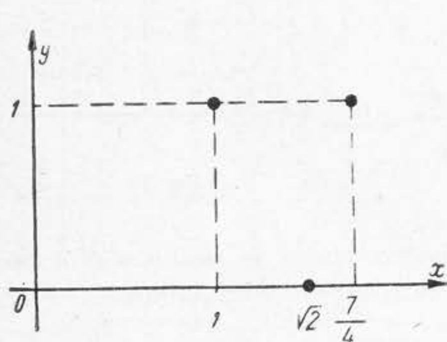


Fig. 33

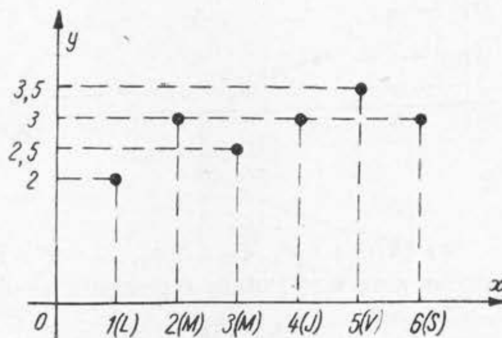


Fig. 34

d) Un tabel cu două linii în care sînt trecute numere unul sub altul defineşte o funcţie, dacă toate numerele din prima linie sînt diferite între ele. Domeniul de definiţie al unei astfel de funcţii este mulţimea numerelor din prima linie.

Exemple :

1) Un tractorist ară peste plan, în fiecare din cele şase zile ale unei anumite săptămîni, un număr de hectare, indicat în tabelul următor :

x	ziua	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	nr. hect. peste plan	2	3	2,5	3	3,5	3

Graficul acestei funcţii este format numai din şase puncte izolate din plan (fig. 34).

2) Printr-o rezistenţă variabilă trece un curent de tensiune constantă, $V = 120$ de volţi. La diferite valori ale rezistenţei corespund diferite valori ale intensităţii curentului, indicate în tabelul următor :

R (în ohmi)	10	20	60
I (în amperi)	12	6	2

Graficul acestei corespondenţe, $I = f(R)$, este format din trei puncte din plan (fig. 35). Se constată că, pentru valorile lui R şi I din tabel, avem $RI = 120 = V$. Se ştie că această egalitate este adevărată şi pentru alte valori ale lui R şi I (legea lui Ohm).

De altfel, procedeul de mai sus este utilizat în mod curent în fizică : pentru determinarea unei funcţii se dau variabilei independente cîteva valori particulare, se obţin valorile corespunzătoare ale funcţiei, se alcătuieşte un tabel şi se extinde corespondenţa astfel obţinută şi pentru alte valori ale argumentului.

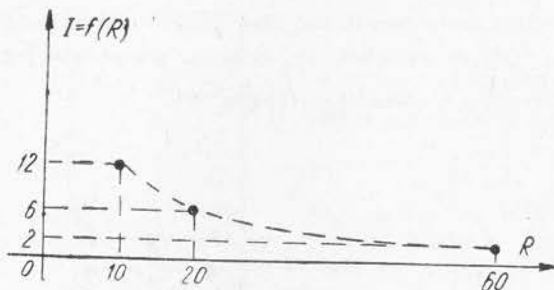


Fig. 35

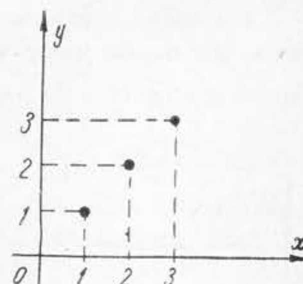


Fig. 36

e) Orice şir $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ este o funcţie definită pe mulţimea N a numerelor naturale. Putem reprezenta şirul (a_n) într-un tabel infinit :

x	1,	2,	3,	...,	n,	...
$f(x)$	a_1,	a_2,	a_3,	...,	a_n,	...

Graficul unui şir este mulţimea infinită a punctelor izolate din plan de forma (n, a_n).

Exemple :

1) Şirul 1, 2, 3, ..., n, ... are graficul format din punctele (1, 1), (2, 2), ..., (n, n), ... (fig. 36).

2) Şirul 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, ... are graficul format din punctele (1, 1), (2, 2), (3,1), (4,2), ..., ($2n$ — 1,1), ($2n$, 2) ... (fig. 37).

3) Un şir constant $a, a, ..., a, ...$ are punctele graficului său aşezate pe o paralelă la axa Ox (fig. 38).

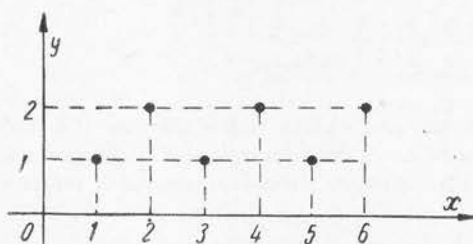


Fig. 37

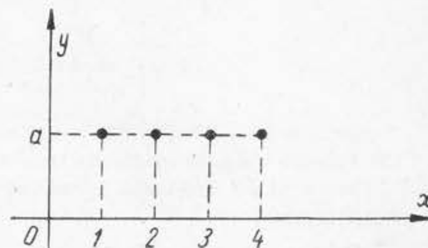


Fig. 38

f) O curbă C din plan (fig. 39) care are proprietatea că orice paralelă la axa Oy o întîlneşte în cel mult un punct defineşte o funcţie f. Graficul funcţiei f este chiar curba C.

Domeniul de definiţie D al funcţiei f este proiecţia pe axa Ox a curbei C.

Modul în care se face să corespundă unui punct x din D valoarea $f(x)$ a funcţiei f este simplu: se ridică perpendiculara în x pe axa Ox. Aceasta întîlneşte curba C într-un singur punct, M. Paralela prin M la axa Ox întîlneşte axa Oy în punctul $f(x)$.

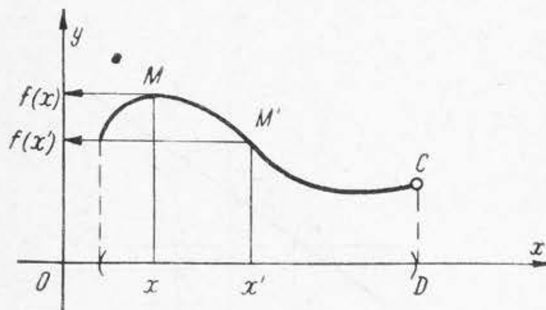


Fig. 39

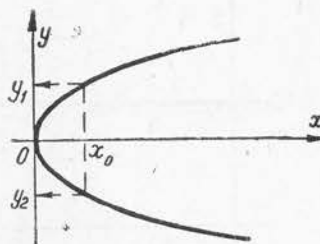


Fig. 40

Observaţie. S-a impus curbei C condiţia de a fi întîlnită de o paralelă la Oy în cel mult un punct, deoarece, conform definiţiei unei funcţii, unui punct x de pe axa absciselor trebuie să-i corespundă un *singur* punct $f(x)$ de pe axa ordonatelor. O curbă plană care este întîlnită de unele paralele la axa Oy în două sau mai multe puncte nu defineşte o funcţie. De exemplu, curba din figura 40 nu defineşte o funcţie, deoarece lui x_0 îi corespund două puncte y_1 şi y_2 pe axa Oy.

§ 2. FUNCŢII ELEMENTARE

În analiza matematică sînt numite funcţii elementare următoarele clase de funcţii: polinoamele, funcţiile raţionale, funcţia putere, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică, funcţiile circulare directe şi funcţiile circulare inverse.

Să considerăm pe rînd aceste clase de funcţii, pentru a le preciza.

1. **Polinoame**

Polinoamele sînt funcţii de forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sînt numere reale şi se numesc coeficienţi ai polinomului; a_0 se numeşte termenul liber. Dacă $a_n \neq 0$, polinomul este de gradul n.

Deoarece exponenții de la puterile lui x sînt numere naturale, x poate fi orice număr real. Așadar, se poate lua ca *domeniu de definiție al unui polinom orice mulțime de numere, în particular toată dreapta.*

Să dăm cîteva exemple de polinoame :

a. *Funcția constantă*, $f(x) \equiv a$, care are aceeași valoare în fiecare punct x din domeniul său de definiție, este un caz particular de polinom — *polinomul de gradul* 0. Dacă funcția constantă este definită pe R, graficul său este o dreaptă paralelă cu axa Ox (fig. 41); dacă $a = 0$, funcția $f(x) = 0$ are ca grafic axa Ox.

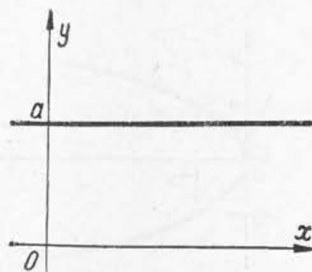


Fig. 41

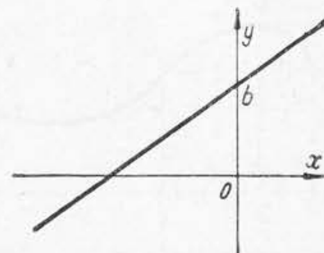


Fig. 42

b. *Polinomul de gradul întîi*, $f(x) = ax + b$, poate fi definit pe toată dreapta și, în acest caz, are ca grafic o linie dreaptă (fig. 42); din acest motiv, polinoamele de gradul întîi se mai numesc *funcții liniare*. Dacă $a = 1$ și $b = 0$, se obține *funcția identică* $f(x) = x$, al cărei grafic este prima bisectoare (fig. 43). Valoarea acestei funcții într-un punct x este tot x.

Observație. Trebuie făcută distincție între variabila independentă x și funcția identică $f(x) = x$.

Dacă $a = -1$ și $b = 0$, se obține funcția $f(x) = -x$, al cărei grafic este bisectoarea a doua (fig. 44).

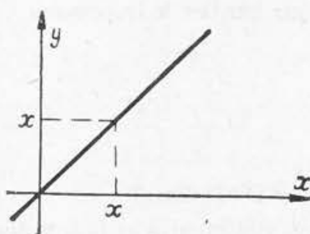


Fig. 43

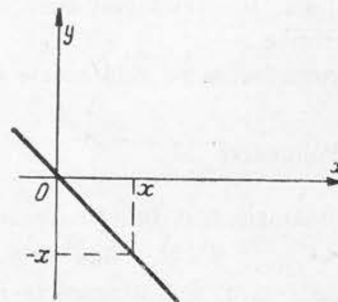


Fig. 44

c. *Funcţia* $f(x) = x^2$ este un polinom cu toţi coeficienţii nuli, în afară de $a_2 = 1$. Graficul funcţiei $f(x) = x^2$ definită pe R este dat în figura 45 *.

Se observă că valorile $f(x)$ ale acestei funcţii sînt pozitive, oricare ar fi x (pozitiv sau negativ).

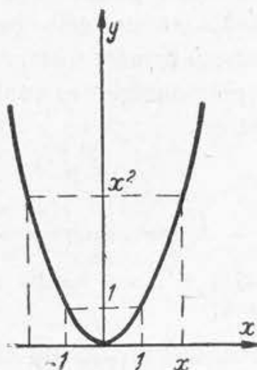


Fig. 45

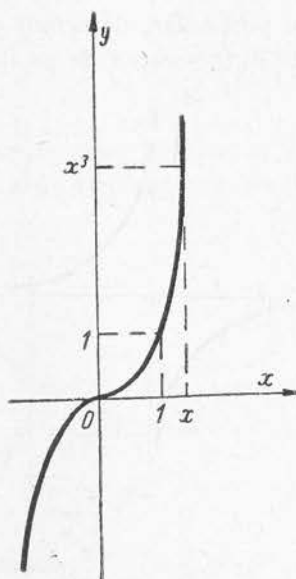


Fig. 46

d. *Funcţia* $f(x) = x^3$ este un polinom de grad impar, cu toţi coeficienţii nuli, în afară de $a_3 = 1$. Graficul funcţiei $f(x) = x^3$ definită pe R este dat în figura 46.

Se observă că, dacă $x > 0$, atunci $f(x) > 0$ şi dacă $x < 0$, atunci $f(x) < 0$.

2. Funcţii raţionale

Funcţiile raţionale sînt rapoarte de polinoame, de forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Dacă x_0 este un punct în care se anulează numitorul, $Q(x_0) = 0$, nu putem efectua împărţirea $\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, deoarece împărţirea cu 0 nu are sens, şi

* Graficul acestei funcţii, ca şi graficele funcţiilor din exemplele următoare, se poate construi uşor prin puncte. Construirea graficelor va fi studiată sistematic şi amănunţit într-un capitol ulterior.

deci, funcţia f *nu este definită în* x_0. *Funcţia raţională* f *poate fi deci definită pe orice mulţime care nu conţine punctele în care se anulează numitorul* Q. În particular, domeniul de definiţie al funcţiei raţionale poate fi mulţimea obţinută scoţînd de pe dreaptă punctele în care se anulează numitorul (domeniul maxim pe care poate fi definită).

Dacă numitorul Q este de grad 0, funcţia raţională este un polinom. Printre funcţiile raţionale, polinoamele au proprietăţi asemănătoare cu cele pe care le au numerele întregi printre numerele raţionale; de aceea, polinoamele se numesc *funcţii raţionale întregi.*

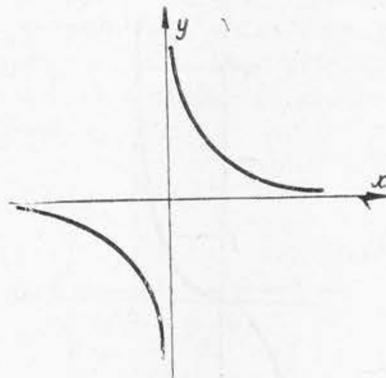


Fig. 47

Exemple:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$. Se poate lua ca domeniu de definiţie $R - \{0\}$ şi atunci funcţia are ca grafic o hiperbolă (fig. 47).

2) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$. Această funcţie nu poate fi definită în punctele -1 şi 1, în care se anulează numitorul, deci domeniul ei de definiţie poate fi cel mult $R - \{-1, 1\}$.

3) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$. Numitorul acestei funcţii nu are nici o rădăcină reală, deci domeniul de definiţie al acestei funcţii poate fi orice mulţime de numere reale.

3. Funcţia putere

Funcţia putere este de forma $f(x) = x^\alpha$, unde α este un număr real oarecare (raţional sau iraţional).

Dacă $\alpha = 0$, se obţine funcţia constantă $f(x) \equiv 1$; dacă α este număr natural, se obţine polinomul particular $f(x) = x^n$; dacă α este număr întreg negativ, $\alpha = -n$, se obţine funcţia raţională $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

Dacă α nu este număr întreg, pentru ca puterea x^α să aibă sens, trebuie ca $x > 0$; în acest caz, funcţia are numai valori strict pozitive, deoarece $x^\alpha > 0$, dacă $x > 0$.

Vor fi întîlnite mai frecvent funcţii putere cu exponent raţional, de exemplu $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cu n şi m numere întregi şi $n > 0$.

4. Funcţia exponenţială

Funcţia exponenţială este de formă $f(x) = a^x$, unde $a > 0$, şi $a \neq 1$. Dacă $a = 0$, se obţine funcţia constantă $f(x) \equiv 0$, şi dacă $a = 1$, se obţine funcţia constantă $f(x) \equiv 1$.

Funcţia exponenţială $f(x) = a^x$ poate fi definită pentru orice x, deci domeniul său de definiţie poate fi toată dreapta sau orice parte a dreptei.

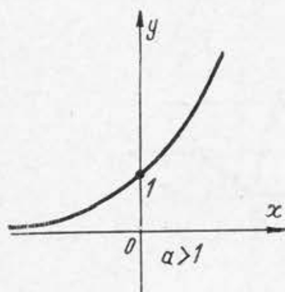


Fig. 48

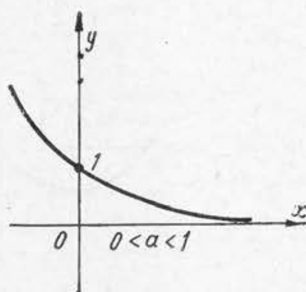


Fig. 49

Graficul funcţiei are o anumită formă pentru $a > 1$ (fig. 48) şi o altă formă pentru $0 < a < 1$ (fig. 49).

Funcţia are numai valori pozitive; într-adevăr, oricare ar fi x, avem $a^x > 0$, deoarece $a > 0$.

5. Funcţia logaritmică

Funcţia logaritmică este $f(x) = \log_a x$, unde baza $a > 0$ şi $a \neq 1$. Se ştie că logaritmii au sens numai pentru numerele strict pozitive, $x > 0$. Pentru numerele strict negative şi pentru 0, logaritmii nu au sens. Domeniul de definiţie al funcţiei poate fi deci cel mult semidreapta $(0, +\infty)$. Funcţia poate lua şi valori pozitive, şi negative. Graficul funcţiei are o anumită formă pentru $a > 1$ (fig. 50) şi o altă formă pentru $0 < a < 1$ (fig. 51).

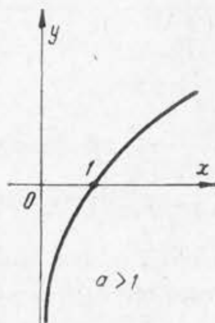


Fig. 50

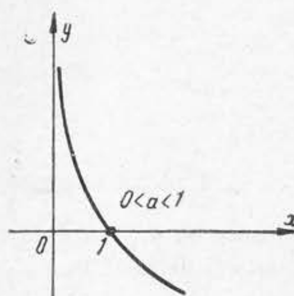


Fig. 51

6. Funcțiile circulare

a. *Funcția sinus* sau sin, $f(x) = \sin x$, poate fi definită pe orice mulțime de numere. Dacă este definită pe toată dreapta, are graficul din figura 52. Această funcție se anulează în punctele $x = k\pi$ (k întreg); mulțimea valorilor sale este intervalul $[-1, +1]$.

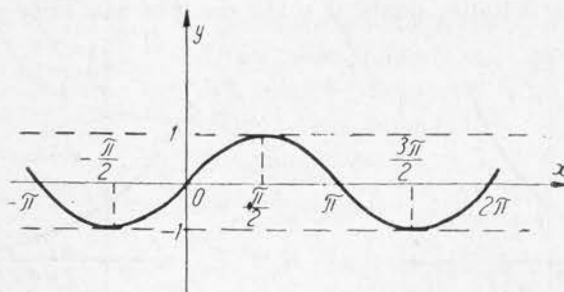


Fig. 52

b. *Funcția cosinus* sau cos, $f(x) = \cos x$, poate fi definită pe orice mulțime de numere. Dacă este definită pe toată dreapta, are graficul din figura 53. Funcția se anulează în punctele $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (k întreg); mulțimea valorilor sale este intervalul $[-1, 1]$.

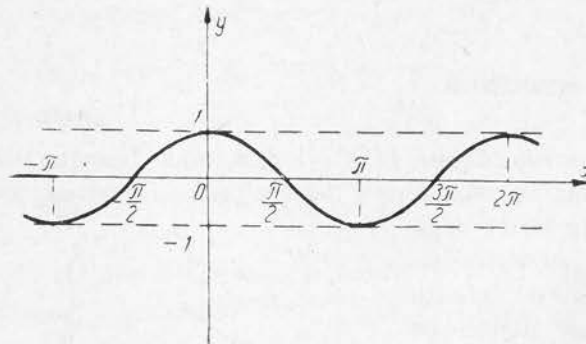


Fig. 53

c. *Funcția tangentă* sau tg, $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dacă x_0 este un punct în care se anulează funcția cosinus, $\cos x_0 = 0$, atunci funcția tangentă nu poate fi definită în x_0, deoarece împărțirea cu 0 nu are sens. Punctele în care *nu* poate fi definită funcția tangentă sînt deci de forma $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (k întreg).

Graficul funcţiei tangentă este dat în figura 54.

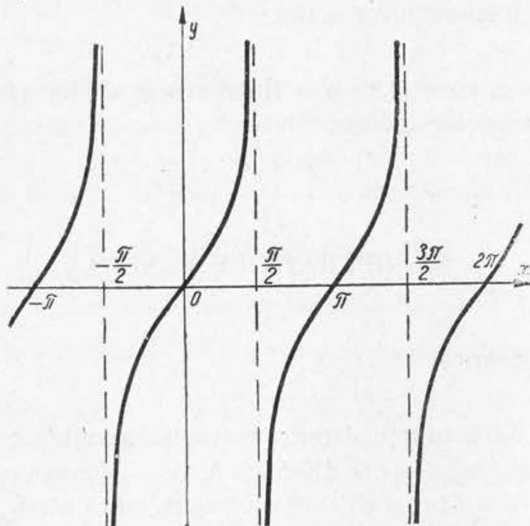


Fig. 54

d. *Funcţia cotangentă* sau ctg, $f(x) = \text{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Funcţia nu poate fi definită în punctele în care se anulează numitorul, adică în punctele de forma $k\pi$ (k întreg). Domeniul de definiţie este deci conţinut în mulţimea:

$$R - \{..., -n\pi, ..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ..., n\pi, ...\}$$

sau poate fi chiar această mulţime.

Graficul funcţiei cotangentă este dat în figura 55.

Observaţie. Au fost omise funcţiile secantă şi cosecantă, deoarece ele prezintă o importanţă mai mică.

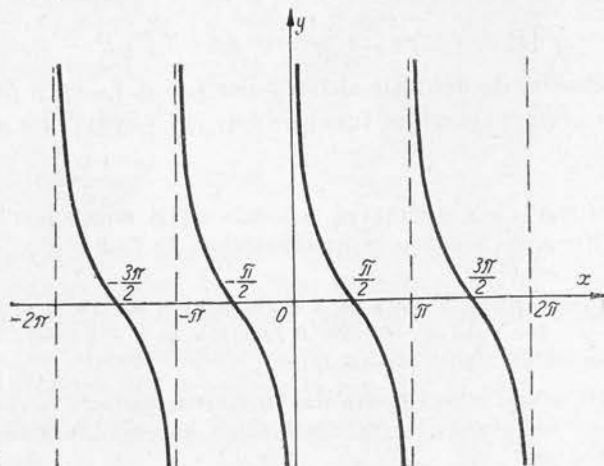


Fig. 55

7. Funcţiile circulare inverse sînt:

arcsin, arccos, arctg, arcctg. Ele vor fi definite şi studiate în cadrul paragrafului consacrat funcţiilor inverse.

§ 3. OPERAŢII CU FUNCŢII

1. Operaţii algebrice

a) Fie f şi g două funcţii definite respectiv pe mulţimile A şi B. Ca să putem efectua suma $f(x) + g(x)$, diferenţa $f(x) - g(x)$ sau produsul $f(x) \cdot g(x)$ trebuie mai întîi, ca şi $f(x)$ şi $g(x)$ să aibă sens, adică atît f cît şi g să fie definite în punctul x sau, cu alte cuvinte, x să aparţină şi domeniului de definiţie A al lui f, şi domeniului de definiţie B al lui g; aşadar, x trebuie să fie un punct comun lui A şi B, adică să aparţină intersecţiei $A \cap B$.

Suma $s = f + g$ a funcţiilor f şi g este definită pe intersecţia $A \cap B$ a domeniilor lor de definiţie, prin egalitatea:

$$s(x) = f(x) + g(x), \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Diferenţa $d = f - g$ este definită pe $A \cap B$, prin egalitatea:

$$d(x) = f(x) - g(x) \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Produsul $p = fg$ este definit pe $A \cap B$, prin egalitatea:

$$p(x) = f(x)\, g(x) \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Aşadar, domeniul de definiţie al funcţiilor $f + g$, $f - g$ şi fg este $A \cap B$. Dacă A şi B n-au puncte comune, funcţiile $f + g$, $f - g$ şi fg nu pot fi definite.

Exemple:

1) Fie funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $A = (0, +\infty)$ şi funcţia $g(x) = \sqrt{-x}$ definită pe $B = (-\infty, 0]$. Deoarece A şi B n-au puncte comune, ($A \cap B = \emptyset$), funcţiile $f + g$, $f - g$ şi fg nu pot fi definite.

2) Fie funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $A = (0, +\infty)$ şi funcţia $g(x) = \sqrt{x-1}$ definită pe $B = [1, +\infty)$. Domeniul de definiţie al funcţiilor $\ln x + \sqrt{x-1}$, $\ln x - \sqrt{x-1}$, $\sqrt{x-1} \ln x$ este mulţimea $A \cap B\, [1, +\infty)$.

Observaţie. Prin adunarea unei funcţii $f(x)$ cu funcţia constantă $\varphi(x) \equiv 0$ se obţine tot funcţia $f(x)$, deci *pentru adunarea funcţiilor, funcţia $\varphi(x) \equiv 0$ joacă acelaşi rol ca şi 0 pentru adunarea numerelor*

De asemenea, prin înmulţirea unei funcţii $f(x)$ cu funcţia constantă $\psi(x) \equiv 1$ se obţine tot funcţia $f(x)$, deci *pentru înmulţirea funcţiilor, funcţia* $\psi(x) \equiv 1$ *joacă acelaşi rol ca şi* 1 *pentru înmulţirea numerelor.*

b) Dacă f este o funcţie definită pe A şi a un număr, atunci produsul $a\,f(x)$ are sens pentru orice x în care funcţia f este definită, adică pentru orice $x \in A$.

Funcţia $h = af$ *este definită, ca şi* f, *pe mulţimea* A, *prin egalitatea:*

$$h(x) = a\,f(x) \text{ pentru } x \in A.$$

c) Dacă f şi g sînt două funcţii definite respectiv pe A şi B, pentru a putea efectua împărţirea $\frac{f(x)}{g(x)}$ este necesar, pe de o parte, ca atît $f(x)$, cît şi $g(x)$ să aibă sens, deci $x \in A \cap B$, iar pe de altă parte, ca $g(x) \neq 0$, deoarece împărţirea cu 0 nu are sens.

Domeniul de definiţie al funcţiei cît $c = \frac{f}{g}$ *se obţine scoţînd din intersecţia* $A \cap B$ *punctele în care se anulează funcţia* g *de la numitor, iar funcţia* $c = \frac{f}{g}$ *este definită pe această mulţime prin egalitatea:*

$$c(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A \cap B \quad \text{şi} \quad g(x) \neq 0.$$

De altfel, exact în acest mod a fost stabilit domeniul de definiţie al funcţiilor raţionale şi al funcţiilor tangentă şi cotangentă.

Exemplu:

1) Fie funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $A = (0, \infty)$ şi funcţia $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definită pe $B = [-1, 1]$. Avem $A \cap B = (0, 1]$ şi $g(1) = 0$, deci domeniul de definiţie al funcţiei cît $\frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}$ este $A \cap B - \{1\} = (0, 1)$.

2. Funcţii compuse

O altă operaţie prin care se obţin funcţii noi plecînd de la funcţii date este operaţia de *compunere* a funcţiilor. Să considerăm cîteva exemple simple.

1) Fie M un mobil care se mişcă uniform pe un cerc de rază R, în sensul trigonometric, cu viteza unghiulară de 4 radiani pe secundă. La momentul iniţial $t = 0$, mobilul se află în punctul A (fig. 56). Să se afle la fiecare moment t pistanţa x dintre centrul cercului şi proiecţia M' a mobilului pe diametrul ce trece prin A.

Dacă se notează cu u unghiul AOM, rezultă:

$$x = R \cos u.$$

Dar $u = 4t$, deci:

$$x = R \cos 4t.$$

Dacă notăm $\varphi(u) = R \cos u$ și $f(t) = R \cos 4t$, atunci distanța x se exprimă în funcție de unghiul u, prin egalitatea:

$$x = \varphi(u),$$

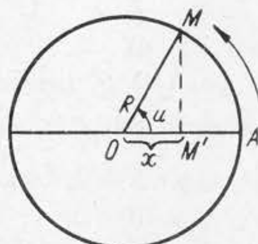


Fig. 56

și în funcție de timpul t, prin egalitatea:

$$x = f(t).$$

Dacă notăm încă $u(t) = 4t$, observăm că funcția $f(t)$ se obține înlocuind în funcția $\varphi(u)$ argumentul său, u, cu funcția $u(t) = 4t$:

$$f(t) = \varphi(u(t)) = \varphi(4t) = R \cos 4t.$$

Altfel spus, $f(t)$ se obține aplicînd întîi lui t operațiile indicate de funcția $u(t)$ (se înmulțește t cu 4) și apoi aplicînd rezultatul ($u(t) = 4t$) operațiile indicate de funcția φ (se ia cosinusul și se înmulțește cu R) : $\varphi(u(t)) = \varphi(4t) = R \cos 4t$. Putem spune că operațiile prin care se definește funcția $f(t)$ se obțin *compunînd* operațiile indicate de funcția $\varphi(u)$ cu cele indicate de funcția $u(t)$. Se spune că funcția $f(t)$ s-a obținut prin *compunerea* funcției $\varphi(u)$ cu funcția $u(t)$, sau că $f(t)$ este *funcția compusă* a funcției $\varphi(u)$ cu funcția $u(t)$.

2) Fie funcția $f(x) = \ln \sqrt{x}$ definită pentru $x \in (0, +\infty)$.

Putem obține pe $f(x)$ aplicînd întîi lui x funcția $u(x) = \sqrt{x}$ și apoi aplicînd rezultatului obținut, $u(x)$, funcția $\varphi(u) = \ln u$:

$$\varphi[u(x)] = \ln u(x) = \ln \sqrt{x} = f(x).$$

Se spune că $f(x)$ este *funcția compusă* a funcției $\varphi(u) = \ln u$ cu $u(x) = \sqrt{x}$.

Considerațiile de mai sus conduc la următoarea

Definiție. Fiind date două funcții $\varphi(u)$ și $u(x)$, funcția $f(x) = \varphi(u(x))$ se numește funcția compusă a lui $\varphi(u)$ cu $u(x)$.

Practic, a compune funcția $\varphi(u)$ cu funcția $u(x)$ revine la a înlocui în funcția $\varphi(u)$ argumentul său u cu funcția $u(x)$.

Observație. Nu trebuie să se creadă că oricare două funcții se pot compune; de exemplu funcțiile $\varphi(u) = \ln u (u > 0)$ și $u(x) = -\sqrt{x}$, $(x \geqslant 0)$ nu se pot compune, deoarece $\ln(-\sqrt{x})$ nu are sens. Așadar, notînd cu A mulțimea punctelor x pe care este

definită funcţia u şi cu B mulţimea valorilor $u(x)$ ale acestei funcţii, pentru a putea scrie $\varphi(u(x))$ trebuie ca funcţia φ să fie definită în orice punct $u(x)$ din B, deci trebuie ca funcţia φ să fie definită pe B; atunci funcţia $f(x) = \varphi(u(x))$ este definită în aceleaşi puncte x ca şi funcţia $u(x)$, adică pe A.

Schematic, această situaţie se poate reprezenta ca în figura 57.

Se pot compune de asemenea trei, patru sau mai multe funcţii. De exemplu, fiind date trei funcţii: $\varphi(u)$, $u(x)$, $x(t)$, funcţia

$$f(t) = \varphi(u(x(t)))$$

se numeşte funcţie compusă a celor trei funcţii, în ordinea indicată.

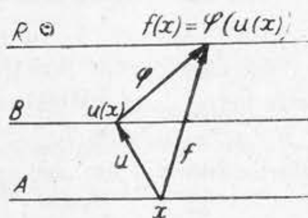


Fig. 57

Exemplu:

1) $\varphi(u) = \sin u$, $u(x) = \sqrt{x}$, $x(t) = 2t^2 + 1$, $f(t) = \sin \sqrt{2t^2 + 1}$;

2) $\varphi(u) = u^2$, $u(x) = \operatorname{tg} x$, $x(z) = e^z$, $z(t) = \sqrt{2t+1}$, $f(t) = \left(\operatorname{tg} e^{\sqrt{2t+1}}\right)^2$.

În aplicaţii intervine mai frecvent problema inversă: dîndu-se o funcţie $f(x)$, să se găsească două sau mai multe funcţii care prin compunere să dea funcţia $f(x)$.

Exemple:

1) Fie $f(x) = \sin 2x$. Notînd $u(x) = 2x$, atunci $f(x) = \sin u(x)$. Aşadar, $f(x)$ se obţine compunînd funcţiile $\varphi(u) = \sin u$ şi $u(x) = 2x$, în ordinea indicată:

$$f(x) = \varphi(u(x)) = \sin u(x) = \sin 2x.$$

2) Fie $f(x) = \ln \sin \dfrac{x}{x+1}$. Notăm $\varphi(u) = \ln u$, $u(z) = \sin z$ şi $z(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Atunci:

$$f(x) = \varphi(u(z(x))) = \ln u(z(x)) = \ln \sin z(x) = \ln \sin \frac{x}{x+1}.$$

Observaţii. 1° Problema descompunerii unei funcţii date în funcţii componente nu are soluţie unică. În exemplul 1 de mai sus putem nota: $\varphi(u) = \sin 3u$ şi $u(x) = \dfrac{2}{3}x$, şi atunci:

$$\varphi(u(x)) = \sin 3u(x) = \sin 3 \cdot \frac{2}{3} x = \sin 2x = f(x).$$

Scopul descompunerii unei funcţii în funcţii componente este de a reduce studiul acesteia la studiul unor funcţii componente cît mai simple.

2° Efectuînd asupra funcţiilor elementare, de un număr finit de ori, operaţiile algebrice, şi operaţia de compunere, se obţin alte funcţii, care, prin extensiune, se numesc de asemenea *funcţii elementare*.

3° Prin compunerea unei funcţii $f(u)$ cu funcţia identică $u(x) = x$, se obţine funcţia $f(u(x)) = f(x)$, adică tot funcţia $f(u)$, deoarece modul cum se notează argumentul, cu u sau x, nu are importanţă. Aşadar, *pentru operaţia de compunere, funcţia identică joacă acelaşi rol ca şi funcţia* $\varphi(x) \equiv 0$ *pentru adunare sau ca funcţia* $\psi(x) \equiv 1$ *pentru înmulţire.*

§ 4. FUNCȚII INVERSE

1. Funcții strict monotone

Să considerăm funcția $f(x) = x^2$ definită pentru $x \in [0, \infty)$ (fig. 58). Dacă luăm două valori oarecare x_1 și x_2 ale argumentului, astfel ca $x_1 < x_2$ ($x_1 \geqslant 0$), atunci $x_1^2 < x_2^2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$. Așadar, inegalitatea dintre valorile funcției are același sens ca și inegalitatea dintre valorile argumen-

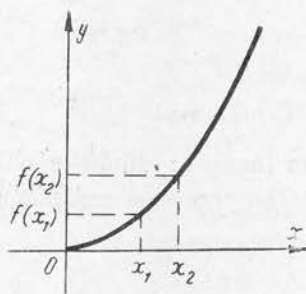


Fig. 58

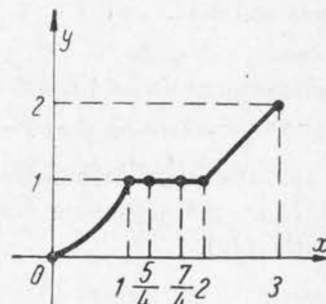


Fig. 59

tului (dacă x *crește*, atunci și $f(x)$ *crește*). Această proprietate se exprimă spunînd că funcția $f(x) = x^2$ este *strict crescătoare pe* $[0, \infty)$.

$$\text{Funcția } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & \text{pentru } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - 1, & \text{pentru } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{(fig. 59)}$$

are proprietatea că, dacă $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Această funcție nu este strict crescătoare pe $[0, 3]$, deoarece $\frac{5}{4} < \frac{7}{4}$, dar $f\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = 1$. Se spune că această funcție este *crescătoare pe* $[0, 3]$.

Definiție. Se spune că o funcție f este strict crescătoare pe o mulțime A, dacă, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2$ din A, avem $f(x_1) < f(x_2)$.

Dacă funcția f este *strict crescătoare pe tot domeniul ei de definiție*, va fi numită, mai simplu, *funcție strict crescătoare*, fără altă specificație asupra mulțimii pe care o are această proprietate.

Deoarece inegalitatea dintre valorile funcției are același sens ca și inegalitatea dintre valorile argumentului, o funcție strict crescătoare se poate caracteriza și prin aceea că, dacă $x_1 > x_2$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$.

Observații. 1° Denumirea de *funcții crescătoare* este rezervată pentru acele funcții f care au proprietatea că, dacă $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

2° Graficul unei funcții strict crescătoare este întîlnit de o paralelă la axa Ox *cel mult într-un punct.* Într-adevăr, dacă dreapta $y = a$ (paralelă cu Ox) ar întîlni graficul funcției f în două puncte, (x_1, a) și (x_2, a), atunci $f(x_1) = a$ și $f(x_2) = a$; deci presupunînd că $x_1 < x_2$, nu avem $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemple:

1) Funcția $f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe toată dreapta R.

2) Funcția $f(x) = -\frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$, dar nu este strict crescătoare pe reuniunea acestor intervale $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = R - \{0\}$. Într-adevăr, oricare ar fi $x_1 < 0 < x_2$, avem $f(x_1) > f(x_2)$.

3) Funcția $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dar pe intervalul $[0, 2\pi]$ nu este strict crescătoare, deoarece $\frac{\pi}{2} < \pi$, dar $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0 = \sin \pi$.

4) Funcția $f(x) = x^2$ nu este strict crescătoare pe intervalul $[-1, 0]$, deoarece $-1 < 0$, dar $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$.

Să considerăm acum funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pentru $x \in (0, \infty)$ (fig. 60). Dacă luăm două valori oarecare x_1 și x_2 ale argumentului astfel ca $x_1 < x_2$, $(x_1 > 0)$ atunci $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, adică $f(x_1) > f(x_2)$. Așadar, inegalitatea dintre valorile funcției este de sens contrar inegalității dintre valorile argumentului (dacă x *crește*, atunci $f(x)$ *descrește*). Această proprietate se exprimă spunînd că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ este *strict descrescătoare* pe $(0, \infty)$.

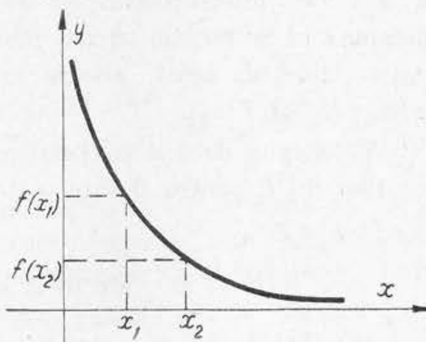


Fig. 60

D e f i n i ț i e. Se spune că o funcție f este strict descrescătoare pe o mulțime A dacă, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2$ din A, avem $f(x_1) > f(x_2)$.

Dacă funcția f este *strict descrescătoare pe tot domeniul ei de definiție, va fi numită, mai simplu, funcție strict descrescătoare*, fără altă specificație.

O funcție strict descrescătoare f este caracterizată și prin aceea că, dacă $x_1 > x_2$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$.

Observații. 1° Denumirea de *funcții descrescătoare* este rezervată pentru funcțiile f, care au proprietatea că, dacă $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

2° Graficul unei funcţii strict descrescătoare este întîlnit de o paralelă la axa Ox *cel mult într-un punct.*

Exemple:

1) Funcţia $f(x) = x^2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

2) Funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$, dar nu este strict descrescătoare pe reuniunea lor $(-\infty, 0) \cup \cup (0, \infty) = R - \{0\}$.

3) Funcţia $f(x) = \sin x$ este strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, dar pe intervalul $[0, 2\pi]$ nu este strict descrescătoare, deoarece $0 < \frac{\pi}{2}$, dar $\sin 0 = 0 < 1 = \sin \frac{\pi}{2}$.

Se spune că o funcţie f este *strict monotonă* pe o mulţime A, fie dacă f este strict crescătoare pe A, fie dacă f este strict descrescătoare pe A. În cazul cînd f este strict monotonă pe tot domeniul ei de definiţie, va fi numită funcţie strict monotonă, fără altă specificaţie.

Orice funcţie strict monotonă are proprietatea importantă că o paralelă la axa Ox intersectează graficul său *cel mult într-un punct*; aceasta înseamnă că o funcţie strict monotonă nu ia aceeaşi valoare în două puncte diferite, adică, oricare ar fi $x_1 \neq x_2$ din domeniul de definiţie, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Altfel spus, dacă A şi B sînt respectiv domeniul de definiţie şi domeniul valorilor lui f, pentru fiecare $y \in B$, ecuaţia în x

$$y = f(x)$$

are în A o soluţie x (care depinde de y), şi numai una.

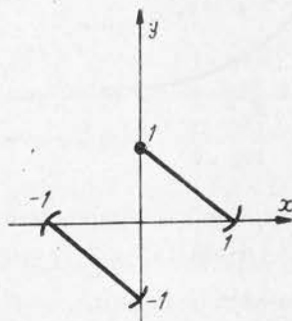


Fig. 61

Observaţie. Funcţiile strict monotone nu sînt singurele funcţii care au această proprietate. De exemplu, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{pentru } -1 \leqslant x < 0 \\ -x+1, & \text{pentru } \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

definită pe $(-1, 1)$ (fig. 61), nu este strict crescătoare, nici strict descrescătoare pe $(-1, 1)$, dar nu ia aceeaşi valoare în două puncte diferite.

Funcţiile care au proprietatea că nu iau aceeaşi valoare în puncte diferite (adică, dacă $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$) se numesc *funcţii biunivoce*. Funcţiile strict monotone sînt deci funcţii biunivoce. Graficul unei funcţii biunivoce este întîlnit de o paralelă la axa Ox *cel mult într-un punct.*

2. Funcţii inverse

Operaţiile algebrice admit operaţii inverse. Astfel, scăderea este operaţia inversă a adunării, iar împărţirea este operaţia inversă a înmulţirii.

Tot astfel pentru operaţia de compunere a funcţiilor se poate defini o operaţie inversă, numită în mod obişnuit *inversarea funcţiilor.*

Să considerăm cîteva exemple simple :

1) La bornele unei rezistenţe electrice R_0 se aplică o tensiune variabilă V. Intensitatea I a curentului electric ce trece prin rezistenţa electrică este dată de legea lui Ohm.

$$I = \frac{V}{R_0}.$$

Această egalitate ne dă, pentru fiecare valoare a tensiunii V, valoarea *corespunzătoare* a intensităţii I, adică stabileşte o corespondenţă între mulţimea A a valorilor tensiunii şi mulţimea B a valorilor intensităţii. Funcţia prin care se stabileşte această corespondenţă este

$$f(V) = \frac{V}{R_0}$$

şi este *definită pe A cu valori în B.*

Dar legea lui Ohm se poate scrie şi astfel :

$$V = R_0 I.$$

Această egalitate permite aflarea valorii tensiunii V, dacă se dă valoarea intensităţii I, adică stabileşte o corespondenţă între mulţimea B a valorilor intensităţii şi mulţimea A a valorilor tensiunii. Funcţia prin care se stabileşte această corespondenţă este

$$\varphi(I) = R_0 I$$

şi este *definită pe B cu valori în A.*

Funcţiile f şi φ stabilesc *corespondenţe reciproce* sau *inverse*, şi anume f stabileşte corespondenţa de la A la B, iar φ stabileşte corespondenţa de la B la A. Funcţiile f şi φ se numesc *funcţii inverse* una alteia : φ este funcţia inversă a lui f, şi f este funcţia inversă a lui φ.

2) Fie funcţia $f(x) = x^2 + 1$ definită pentru $x \in A = [0, \infty)$. Această funcţie este *strict monotonă* şi graficul său (fig. 62) este o curbă C, care are ecuaţia $y = f(x)$, adică :

$$y = x^2 + 1, \quad (x \geqslant 0).$$

Se observă că mulţimea valorilor acestei funcţii este $B = [1, \infty)$. Deoarece $f(x) = x^2 + 1$ este *strict monotonă* pe A, rezultă că, pentru fiecare $y_0 \in B$, ($y_0 \geqslant 1$), ecuaţia în x

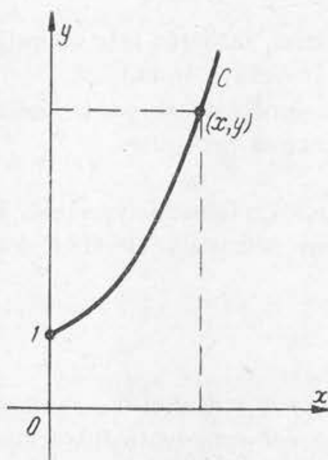


Fig. 62

$$y_0 = x^2 + 1$$

are în A o *singură* soluţie x_0, ($x_0 \geqslant 0$), şi anume:

$$x_0 = \sqrt{y_0 - 1}.$$

Aşadar, rezolvînd în raport cu ecuaţia x

$$y = x^2 + 1,$$

se obţine:

$$x = \sqrt{y - 1}$$

şi această egalitate stabileşte o corespondenţă *reciprocă* sau *inversă* între mulţimea numerelor $y \in B = [1, \infty)$ şi mulţimea numerelor $x \in A = [0, \infty)$. Deoarece fiecărui punct $y \in B$ îi corespunde un *singur* punct $x \in A$, această corespondenţă este o funcţie $\varphi(y) = \sqrt{y - 1}$.

Funcţia $g(x) = x^2 + 1$ definită pe toată dreapta $A = R$ (fig. 63) nu mai este strict monotonă pe R.

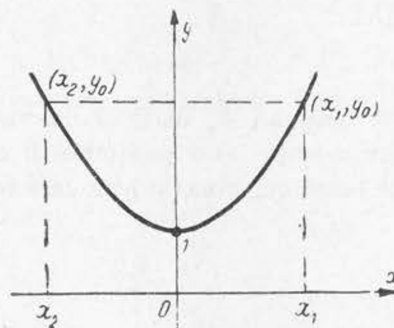


Fig. 63

Pentru $y_0 > 1$, ecuaţia în x

$$y_0 = x^2 + 1$$

are în $A = R$ *nu o singură soluţie, ci două soluţii*: $x_1 = \sqrt{y_0 - 1}$, $x_2 = -\sqrt{y_0 - 1}$; deci, corespondenţa reciprocă nu mai este o funcţie.

Consideraţiile de mai sus se pot generaliza.

Fie f o funcţie *strict monotonă* definită pentru $x \in A$ şi fie B mulţimea valorilor sale (fig. 64). Deoarece f este *strict monotonă*, pentru fiecare punct $y \in B$, ecuaţia în x

$$y = f(x)$$

are în A o *singură soluţie*:

$$x = \varphi(y).$$

Această egalitate stabilește o corespondență *reciprocă* sau *inversă*, de la B la A, care este o funcție φ definită pe B cu valori în A.

Funcțiile f și φ se numesc funcții inverse una alteia: φ este inversa lui f, și f este inversa lui φ.

Practic, după ce se constată că funcția f este strict monotonă pe domeniul său de definiție și că, deci, admite o funcție inversă φ, aceasta se obține rezolvînd ecuația

$$y = f(x)$$

în raport cu x:

$$x = \varphi(y).$$

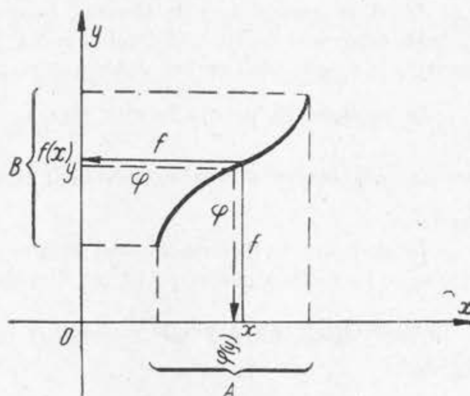


Fig. 64

Exemple:

1) Funcția $f(x) = x + a$ definită pe R este strict crescătoare, deci admite o funcție inversă φ, care se obține rezolvînd ecuația $y = x + a$ în raport cu x, $x = y - a$, deci $\varphi(y) = y - a$.

2) Funcția $f(x) = ax$ definită pe R este strict monotonă, dacă $a \neq 0$. Rezolvînd ecuația $y = ax$ în raport cu x, se obține $x = \frac{1}{a} y$, deci funcția inversă a lui f este $\varphi(y) = \frac{1}{a} y$.

3) Funcția $f(x) = x^2$ definită pe $(-\infty, 0]$ este strict descrescătoare. Ținînd seama că $x \leqslant 0$ și rezolvînd ecuația $y = x^2$ $(y \geqslant 0)$ în raport cu x, se obține $x = -\sqrt{y}$, deci $\varphi(y) = -\sqrt{y}$, $(y \geqslant 0)$, este inversa funcției f.

Graficul funcției $f(x)$ este format din puncte din plan de forma $(x, f(x))$, unde abscisele x sînt valori ale argumentului funcției f.

În cazul funcției inverse $\varphi(y)$, graficul său este format din puncte de forma $(y, \varphi(y))$, în care de asemenea *abscisele* y sînt valori ale argumentului funcției φ.

Să observăm că, dacă $y_0 = f(x_0)$, deci $x_0 = \varphi(y_0)$, punctul (x_0, y_0) se află pe graficul lui f, iar punctul (y_0, x_0) se află pe graficul lui φ. Dar cele două puncte din plan (x_0, y_0) și (y_0, x_0) sînt simetrice față de prima bisectoare (fig. 65), deoarece prima bisectoare este bisectoare în triunghiul isoscel (și dreptunghic) ACB.

Rezultă că *graficele a două funcții inverse sînt simetrice față de prima bisectoare.*

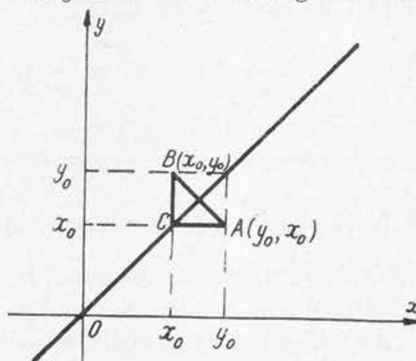


Fig. 65

Pentru uniformitatea notației, argumentul funcției inverse φ se notează tot cu x.

Astfel, în exemplul 1) de mai sus, inversa funcției $f(x) = x + a$ este $\varphi(x) = x - a$. Graficele celor două funcții sînt drepte paralele cu prima bisectoare, cu ordonatele la origine a, respectiv $-a$; cele două grafice sînt simetrice față de prima bisectoare.

În exemplul 2), inversa funcției $f(x) = ax$ este $\varphi(x) = \frac{1}{a} x$. Graficele lor sînt drepte care trec prin origine și care au pantele a, respectiv $\frac{1}{a}$, deci sînt simetrice față de prima bisectoare.

În exemplul 3), inversa funcției $f(x) = x^2$ definită pentru $x \in (-\infty, 0]$ este funcția $\varphi(x) = -\sqrt{x}$ definită pentru $x \in [0, \infty]$. Graficele lor sînt simetrice față de prima bisectoare.

Observație. Scriind că $x = \varphi(y)$ este o soluție a ecuației $y = f(x)$, se obține :

$$y = f(\varphi(y)), \quad (y \in B).$$

Scriind de asemenea că $y = f(x)$ este o soluție a ecuației $x = \varphi(y)$, se obține :

$$x = \varphi(f(x)), \quad (x \in A).$$

Așadar, prin compunerea funcțiilor f și φ, respectiv φ și f, se obține funcția identică $h(y) = y$, $(y \in B)$, respectiv funcția identică $g(x) = x$, $(x \in A)$; aceasta justifică afirmația de la începutul acestui număr că inversarea funcțiilor este operația inversă a operației de compunere.

Prin analogie cu notația $f^{-1} = \frac{1}{f}$, folosită pentru inversa lui f față de operația de înmulțire, se notează cu $\overset{-1}{f}$ (-1 scris deasupra lui f și nu ca exponent) inversa φ a lui f față de operația de compunere. Atunci, cele două egalități de mai sus se scriu :

$$y = f(\overset{-1}{f}(y)) \quad (y \in B)$$

și

$$x = \overset{-1}{f}(f(x)) \quad (x \in A).$$

Noțiunea de funcție inversă este uneori foarte utilă, deoarece, cunoscînd proprietățile uneia dintre funcțiile f sau $\overset{-1}{f}$, se pot deduce proprietățile celeilalte.

Astfel, știind că una dintre aceste funcții este strict crescătoare, rezultă că și cealaltă este strict crescătoare; știind că una dintre ele este strict des-

crescătoare, rezultă că şi cealaltă este strict descrescătoare. Aceste proprietăţi se pot observa uşor exprimînd graficele celor două funcţii.

De exemplu, rezolvînd în raport cu x ecuaţia $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, se obţine $x = \log_a y$, deci inversa funcţiei $f(x) = a^x$ definită pe $(-\infty, \infty)$ cu valori în $(0, \infty)$ este funcţia $\overset{-1}{f}(y) = \log_a y$ sau $\overset{-1}{f}(x) = \log_a x$ definită pe $(0, \infty)$ cu valori în $(-\infty, \infty)$. Graficul funcţiei $\overset{-1}{f}(x) = \log_a x$ se obţine, prin simetrie faţă de prima bisectoare, din cel al funcţiei $f(x) = a^x$ (fig. 66, *a*, *b*).

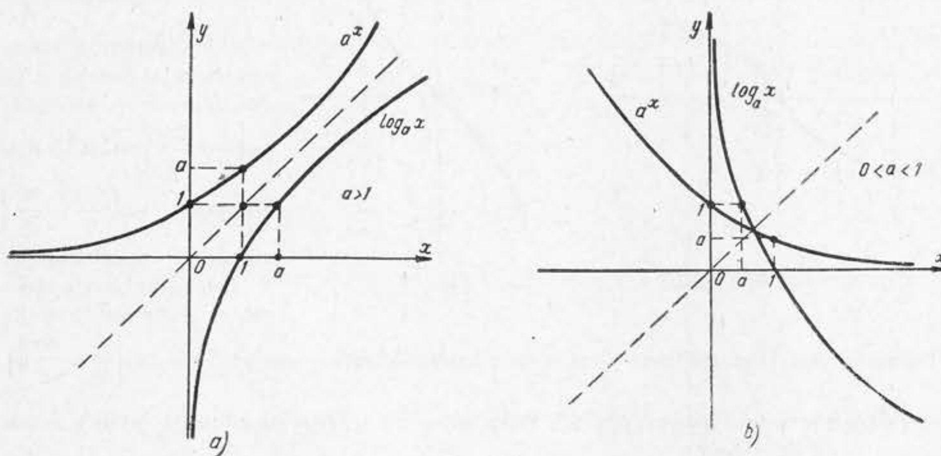


Fig. 66

Pe acest grafic se pot citi unele proprietăţi ale logaritmilor. De exemplu, $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; în cazul cînd $a > 1$, $\log_a x < 0$ dacă $0 < x < 1$, iar $\log_a x > 0$ dacă $x > 1$; deoarece pentru $a > 1$ funcţia $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, rezultă că şi funcţia $\overset{-1}{f}(x) = \log_a x$ este strict crescătoare etc.

3. Funcţii circulare inverse

Funcţiile circulare nu sînt strict monotone, dacă sînt definite pe domeniul maxim pe care pot fi definite, deci nu admit funcţii inverse. Totuşi, dacă aceste funcţii sînt definite pe mulţimi mai restrînse, ele sînt strict monotone, deci se pot inversa.

a. *Funcţia arcsin.* Să considerăm funcţia $f(x) = \sin x$ definită pe intervalul închis $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Această funcţie este strict crescătoare (fig. 67) şi ia valori în intervalul $[-1, 1]$, deci admite o funcţie inversă $\overset{-1}{f}$, strict crescătoare,

definită pe $[-1, 1]$ cu valori în $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 68). Această funcţie se notează cu arcsin : $\overset{-1}{f}(x) = \arcsin x$. Avem :

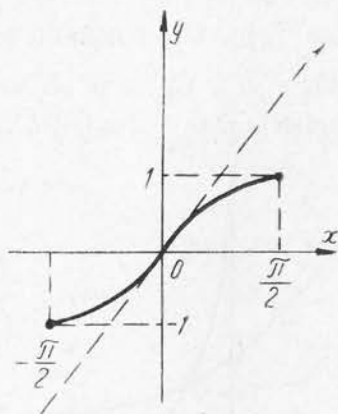


Fig. 67

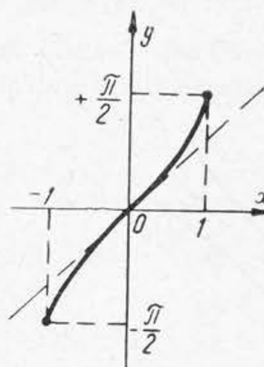


Fig. 68

$$\sin(\arcsin x) = x,$$
pentru $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
$$\arcsin(\sin x) = x,$$
pentru $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Observaţie. Funcţia sin este strict monotonă şi pe alte intervale; de exemplu : pe $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ este strict descrescătoare, pe $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ este strict crescătoare etc. Pe fiecare din aceste intervale se poate considera cîte o funcţie inversă. Dacă notăm cu $f_1(x) = \sin x$ funcţia definită numai pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, f_1 are o funcţie inversă $\varphi_1 = \overset{-1}{f_1}$ (fig. 69). Dacă notăm cu $f_2(x) = \sin x$ funcţia definită numai pe intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, f_2 are o funcţie inversă $\varphi_2 = \overset{-1}{f_2}$ (fig. 70).

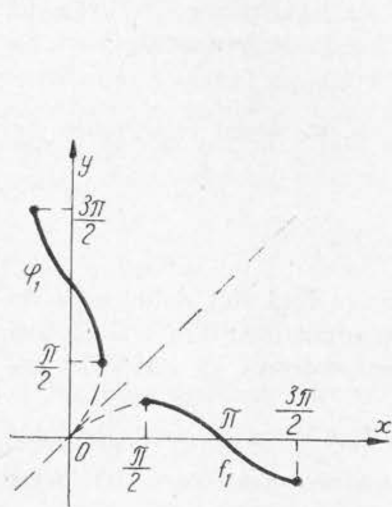


Fig. 69

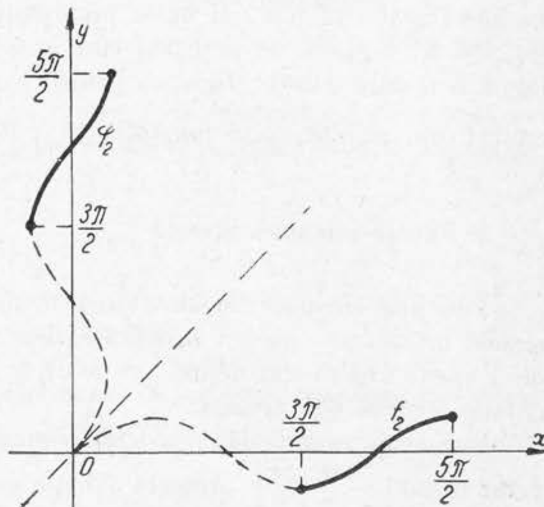


Fig. 70

Funcțiile *diferite* $\overset{-1}{f}$, $\overset{-1}{f_1}$, $\overset{-1}{f_2}$ sînt, respectiv, inversele funcțiilor *diferite* f, f_1, f_2.

Dintre toate aceste funcții inverse, numai funcția $\overset{-1}{f}$, care se obține prin inversarea funcției $f(x) = \sin x$ definită pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se notează cu arcsin.

Considerații analoge se pot face și pentru celelalte funcții circulare.

b. *Funcția arccos.* Să considerăm funcția $f(x) = \cos x$ definită pe intervalul închis $[0, \pi]$. Ea este strict descrescătoare și ia valori în intervalul $[-1, 1]$ (fig. 71), deci admite o funcție inversă $\overset{-1}{f}$ strict descrescătoare, definită pe $[-1, 1]$, cu valori în $[0, \pi]$ (fig. 72). Această funcție se notează cu

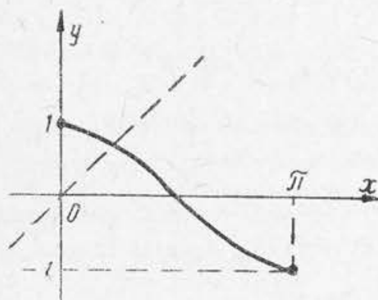


Fig. 71

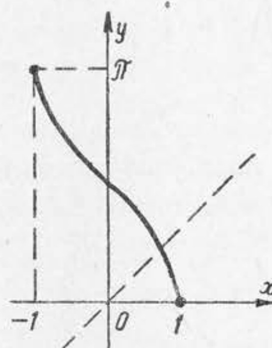


Fig. 72

arccos: $\overset{-1}{f}(x) = \arccos x$. Avem: $\cos(\arccos x) = x$ pentru $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $\arccos(\cos x) = x$ pentru $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

c. *Funcția arctg.* Să considerăm funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pe intervalul deschis $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ea este strict crescătoare și ia orice valoare din $(-\infty, +\infty)$ (fig. 73), deci admite o funcție inversă $\overset{-1}{f}$ strict crescătoare, definită pe $(-\infty, +\infty)$ cu valori în $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 74). Această funcție inversă se notează cu arctg: $\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{arctg} x$. Avem:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ pentru } -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ pentru } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

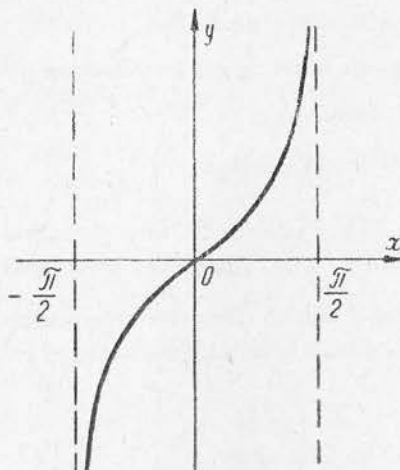


Fig. 73

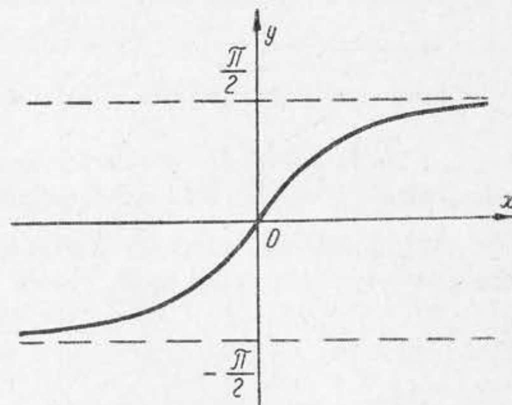


Fig. 74

d. *Funcţia arcctg.* Să considerăm funcţia $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definită pe intervalul deschis $(0, \pi)$. Ea este strict descrescătoare şi ia orice valoare din $(-\infty, +\infty)$ (fig. 75), deci are o funcţie inversă $\overset{-1}{f}$ strict descrescătoare, definită pe $(-\infty, +\infty)$ cu valori în $(0, \pi)$ (fig. 76). Această funcţie inversă se notează cu arcctg : $\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{arcctg} x$. Avem :

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \text{ pentru } -\infty < x < \infty;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \text{ pentru } 0 < x < \pi.$$

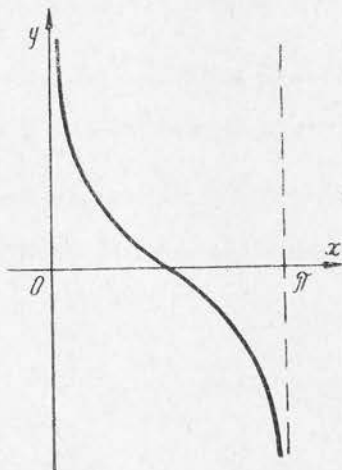


Fig. 75

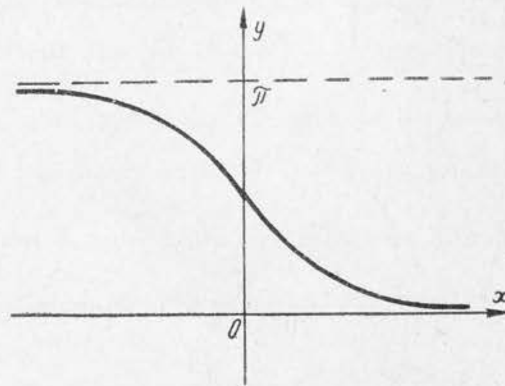


Fig. 76

EXERCIŢII

1. Fie $E = \{a_1, a_2\}$ $F = \{b\}$;
$E = \{a_1, a_2\}$ $F = \{b_1, b_2\}$;
$E = \{a_1, a_2, a_3\}$ $F = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Cîte funcţii definite pe E şi cu valori în F există în fiecare din cazurile de mai sus? Să se specifice aceste funcţii.

2. În triunghiul ABC, avînd baza $\overline{AC} = b$ şi înălţimea $\overline{BB'} = h$, se înscrie dreptunghiul $LMNP$ (L, P — pe $\overline{AC}$; M — pe $\overline{AB}$), a cărui înălţime $\overline{NP}$ se notează cu x. Să se exprime, în funcţie de x, perimetrul şi aria acestui dreptunghi: $P(x)$, $A(x)$. În cazul particular $b = 4$ cm, $h = 2$ cm, să se construiască prin puncte graficele funcţiilor P şi A.

3. În intervalul $[0, 1]$ al axei Ox este distribuită o masă de densitate 2, iar în punctele 2 şi 3 sînt plasate mase punctuale de cîte un gram. Să se determine, ca funcţie de x, masa totală din intervalul $(-\infty, x]$.

În fiecare din exerciţiile următoare să se calculeze valorile cerute în dreptul funcţiei respective:

4. $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2+1}$; $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$.

5. $f(x) = (2x-1)\arcsin(x+1) - \ln(x^2+1)$; $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)$.

6. $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1; \\ 3, & \text{pentru } x \geqslant 1. \end{cases}$ $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(e)$.

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & \text{pentru } x < 0; \\ \dfrac{2x+1}{x-4}, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 5; \\ \dfrac{1}{2}e^{3x}, & \text{pentru } x > 5. \end{cases}$ $f(-1)$, $f(0)$, $f(\pi)$, $f(5)$, $f\left(\frac{20}{3}\right)$.

8. Notînd cu f funcţia definită de şirul $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$, să se calculeze $f(1)$, $f(3)$ şi $f(794)$ şi să se construiască prin puncte graficul lui f.

La fiecare din exerciţiile următoare să se construiască prin puncte — în raport cu acelaşi sistem de axe — graficele funcţiilor respective şi să se compare:

9. $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = x^4$.

10. $f_1(x) = x^3$; $f_2(x) = x^5$.

11. $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$; $f_2(x) = \frac{1}{x^4}$.

12. $f_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$.

13. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$; $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Să se determine funcțiile următoare, ținînd seama de condițiile specificate în dreptul fiecăreia:

14. $f(x) = ax + b$; $f(0) = 4$, $f(1) = -5$.

15. $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$.

16. $f(x) = a + bc^x$; $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

Să se stabilească domeniul maxim pe care pot fi definite funcțiile următoare:

17. $f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 9}$.

18. $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x - 1}$.

19. $f(x) = \frac{5x + 2}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

20. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.

21. $f(x) = \sqrt{x(x^3 + 1)}$.

22. $f(x) = x\sqrt[3]{x + 7}$.

23. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x + 2}}$.

24. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x - 7}$.

25. $f(x) = (x^2 - 7x - 18)^{\sqrt{2}}$.

26. $f(x) = (10 - 3x - x^2)^{-\sqrt{0{,}01}}$.

27. $f(x) = \ln \frac{x - 2}{x + 7}$.

28. $f(x) = \frac{3 \log_2 (x^3 + x)}{x - 1}$.

29. $f(x) = (\ln x)^{\sqrt{2}}$.

30. $f(x) = [\lg (3 + x - x^2)]^{-\sqrt{0{,}3}}$.

31. $f(x) = \mathrm{tg}\,(x - 3)$.

32. $f(x) = \frac{x}{\mathrm{tg}\, x}$.

33. $f(x) = \frac{2 + \sin x}{x - x \cos x}$.

34. $f(x) = \ln \sin x$.

35. $f(x) = \ln \mathrm{tg}\,(2x + 1)$.

36. $f(x) = (x + 1)^{1-x}$.

37. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln x^4, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} \ln x^5, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2+x-x^2}}, & \text{pentru } x \neq -1 \text{ şi } x \neq 2 \\ -5, & \text{pentru } x = -1. \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{pentru } x \text{ raţional şi } x \neq \pm 1. \\ \ln x, & \text{pentru } x \text{ iraţional.} \end{cases}$

În exerciţiile următoare să se arate că, deşi de fiecare dată funcţiile φ şi ψ rezultă una din alta prin transformări uzuale, totuşi sînt *diferite*, în sensul precis că domeniile lor de definiţie diferă, şi anume unul este inclus în celălalt.

41. $\varphi(x) = \dfrac{2x^2-2x}{x^3-1}$; $\qquad \psi(x) = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$.

42. $\varphi(x) = \sqrt[8]{(x^2-1)^2}$; $\qquad \psi(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$.

43. $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$; $\qquad \psi(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

44. $\varphi(x) = \ln(7-6x-x^2)^4$; $\psi(x) = 4\ln(7-6x-x^2)$.

45. Fiind date funcţiile:

$$f(x) = \ln(x+1); \text{ definită pentru } 0 \leqslant x < 5$$

şi

$$g(x) = x^3 - 1; \quad \text{definită pentru } -3 \leqslant x \leqslant 2,$$

să se stabilească domeniile maxime pe care pot fi definite funcţiile fg, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$.

46. Aceeaşi problemă ca mai sus, pentru funcţiile:

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-2}; \text{ definită pentru } x \in \left[-\frac{20}{3}, -2\right] \cup \left[1, \frac{10}{3}\right],$$

şi

$$g(x) = \frac{2x-3}{x+3}; \quad \text{definită pentru } -\frac{9}{4} < x < \pi.$$

În exerciţiile următoare, fiind date perechile de funcţii f şi g, să se stabilească domeniile maxime pe care pot fi definite $f+g$ şi $\dfrac{f}{g}$:

47. $f(x) = 5\sqrt{x^2-9}$; $\qquad g(x) = \sqrt{18-2x^2}$.

48. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$; $\qquad g(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{6x-x^2-8}$.

49. $f(x) = \ln(10x - x^2 - 21)$; $g(x) = \sqrt{9x - 63}$.

În exerciţiile următoare să se determine funcţia $f(x)$ care rezultă compunînd funcţiile respective în ordinea indicată:

50. $\varphi(u) = u^3$; $u(x) = 2x$.

51. $\varphi(v) = \operatorname{tg} v$; $v(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = x + 1$.

52. $\varphi(v) = \ln 3v$; $v(u) = \sin 2u$; $u(x) = 2x - 1$.

53. $\varphi(w) = \operatorname{arctg} w$; $w(v) = \frac{1}{v^2}$; $v(u) = u + 1$; $u(x) = \frac{1}{x}$.

Să se descompună în funcţii componente elementare următoarele funcţii compuse:

54. $f(x) = (x^2 + x + 1)^{23}$.

55. $f(x) = \sin(2x + 3)$.

56. $f(x) = \operatorname{arctg}(x - 5)^4$.

57. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}}$.

58. $f(x) = \ln \cos \sqrt{x^3}$.

59. $f(x) = \ln^2 \operatorname{arcsec}(x + 3)^5$.

Să se determine intervalele pe care sînt strict monotone următoarele funcţii:

60. $f(x) = x^4$; $f(x) = x^5$; $f(x) = x^{2n}$; $f(x) = x^{2n+1}$ (n număr natural oarecare).

61. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $f(x) = \frac{1}{x^{2n}}$; $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$ (n număr natural oarecare).

62. $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

63. $f(x) = 2^x$; $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

64. $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Să se determine intervalele pe care pot fi definite funcţiile de mai jos, astfel încît să admită inverse pe aceste intervale. Să se stabilească de fiecare dată respectiva funcţie inversă. Dînd lui x valori particulare, să se verifice în fiecare caz în parte egalităţile: $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$ şi $f(\overset{-1}{f}(x)) = x$:

65. $f(x) = 3x - 7$.

66. $f(x) = x^2 - 1$.

67. $f(x) = 8x^3 + 5$.

68. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

69. $f(x) = a^{5x-1}$ $(a > 0)$.

70. $f(x) = \ln(2x - 3)$.

71. $f(x) = \sin 3x$.

72. $f(x) = \text{ctg}\ \frac{3x}{5}$.

73. $f(x) = \frac{1}{3} \cos \frac{7x}{2}$.

74. $f(x) = 2\ \text{tg}\ (1 + 3x)$.

75. Să se stabilească în ce caz funcția (numită „funcție omografică")

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

poate fi inversată și să se determine respectiva funcție inversă.

Să se cerceteze apoi funcțiile :

76. $f_1(x) = \frac{x - 1}{-3x + 5}$.

77. $f_2(x) = \frac{3x - 2}{-6x + 4}$.

78. $f_3(x) = \frac{-2x + 9}{8x - 4}$.

CAPITOLUL VII

LIMITE DE FUNCŢII

În capitolul III au fost studiate limitele unor funcţii particulare — şirurile. Cu ajutorul lor va fi definită în acest capitol noţiunea generală de limită a unei funcţii într-un punct, care va fi apoi folosită în capitolele ce urmează pentru definirea noţiunilor de continuitate şi derivabilitate. Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Dîndu-se o funcţie f definită pe o mulţime A, să se studieze *comportarea funcţiei în jurul unui anumit punct* x_0, adică să se stabilească ce se întîmplă cu valorile $f(x)$ ale funcţiei atunci cînd se dau argumentului x valori din ce în ce mai apropiate de x_0. Oare şi valorile funcţiei se apropie din ce în ce mai mult de un anumit număr l?

Comportarea funcţiei în jurul lui x_0 se referă, prin urmare, la valorile funcţiei *nu în punctul* x_0, *ci în celelalte puncte din apropierea lui* x_0, deci problema comportării funcţiei f în jurul lui x_0 se poate pune chiar dacă f nu este definită în x_0; dar, în acest caz, x_0 trebuie ales astfel încît să existe puncte $x \in A$ oricît de apropiate de x_0.

§ 1. EXEMPLE

Să precizăm problema pusă mai sus prin cîteva exemple.

1) Fie funcţia $f(x) = x^2$ definită pe toată dreapta R (fig. 77). Să studiem comportarea acestei funcţii în jurul punctului 2. Pentru aceasta, trebuie să dăm argumentului x valori *diferite de* 2, dar din ce în ce mai apropiate de 2, şi să cercetăm ce se întîmplă cu valorile corespunzătoare $f(x)$ ale funcţiei. Mai precis, trebuie să considerăm un şir (x_n) de puncte *diferite de* 2 şi convergent către 2 ($x_n \to 2$), şi să vedem dacă şirul corespunzător $(f(x_n))$ al valorilor funcţiei are sau nu limită.

Să luăm, de exemplu, următorul şir (x_n) *convergent către* 2:

$$2+\frac{1}{2},\quad 2+\frac{1}{3},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$$

Pentru valorile funcţiei se obţine şirul $(f(x_n))$ următor:

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(2+\frac{1}{3}\right)^2,\ \ldots,\ \left(2+\frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots$$

care are limita 4. Într-adevăr, $2+\frac{1}{n}\to 2$, deci $\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\to 4$.

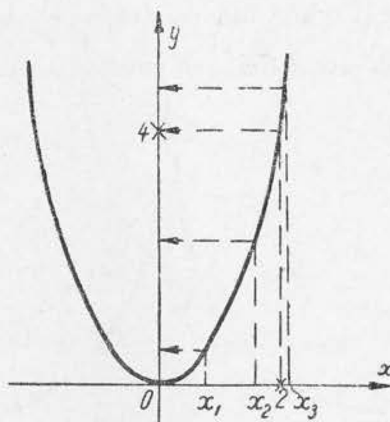


Fig. 77

Considerînd şirul:

$$1,\ 2-\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ \ldots,\ 2-\frac{1}{n},\ \ldots$$

convergent către 2, pentru valorile funcţiei se obţine şirul:

$$1,\ \left(2-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(2-\frac{1}{3}\right)^2,\ \ldots,\ \left(2-\frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots,$$

care are limita 4.

Considerînd şirul:

$$3,\ 2-\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2-\frac{1}{4},\ \ldots$$

convergent către 2, pentru valorile funcţiei se obţine şirul:

$$3^2,\ \left(2-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(2+\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(2-\frac{1}{4}\right)^2,\ \ldots,$$

care are de asemenea *limita* 4.

În general, dacă (x_n) este un şir *oarecare convergent către* 2 (format din puncte diferite de 2), şirul $(f(x_n))$ al valorilor funcţiei are *limita* 4. Într-adevăr, din $x_n\to 2$ rezultă $x_n^2\to 4$, adică $f(x_n)\to 4$.

S-a pus astfel în evidenţă următoarea proprietate a funcţiei $f(x)=x^2$:

Oricare ar fi şirul (x_n) convergent către 2 ($x_n\neq 2$), şirul valorilor funcţiei, $(f(x_n))$, are aceeaşi limită, 4.

Această proprietate se exprimă prescurtat spunînd că *funcţia* $f(x) = x^2$ *are în punctul* 2 *limita* 4 şi se scrie : $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ (sau $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$).

(Se citeşte *limită de* $f(x)$, *cînd* x *tinde către* 2 *este* 4).

2) Fie funcţia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definită pe $R - \{0\}$ (fig. 78). Această funcţie nu este definită în punctul 0, dar în celelalte puncte, oricît de apropiate de 0, este definită.

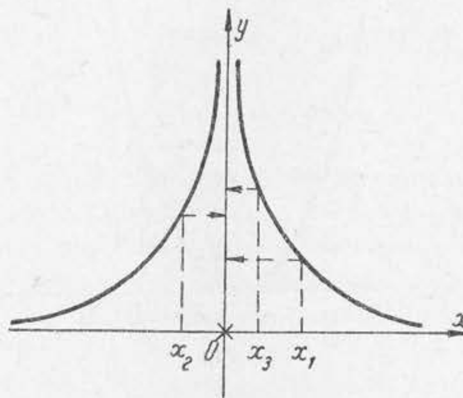


Fig. 78

Să studiem şi în acest caz comportarea funcţiei în jurul lui 0. Pentru aceasta, să luăm următorul şir (x_n) *convergent către* 0 :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Pentru valorile funcţiei se obţine şirul $(f(x_n))$ următor :

$$1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots,$$

care are limita ∞.

Dacă luăm şirul :

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$$

convergent către 0, pentru valorile funcţiei se obţine şirul :

$$1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots,$$

care are limita ∞.

În general, dacă (x_n) este un şir oarecare de puncte din $R - \{0\}$, $(x_n \neq 0)$ *convergent către* 0, $x_n \to 0$, avem $x_n^2 \to 0$ şi $x_n^2 > 0$, deci $\frac{1}{x_n^2} \to \infty$, adică $f(x_n) \to \infty$.

Aşadar :

Oricare ar fi şirul $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$, *şirul* $(f(x_n))$ *are aceeaşi limită*, ∞

Această proprietate se enunţă prescurtat astfel : *funcţia* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *are în punctul* 0 *limita* ∞ şi se scrie : $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ sau $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

(Se citeşte limită de $f(x)$, cînd x tinde către 0 este ∞.)

3) Fie funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ (fig. 79). Să studiem comportarea acestei funcţii în jurul lui ∞, înţelegînd prin aceasta că se dau argumentului x valori din ce în ce mai mari (din ce în ce mai apropiate de ∞) şi se cercetează ce se întîmplă cu valorile corespunzătoare ale funcţiei. Mai precis, se consideră un şir $x_n \to \infty$ şi se cercetează dacă şirul $(f(x_n))$ are sau nu limită.

De exemplu, considerînd şirul (x_n) următor:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

care are limita ∞, pentru valorile funcţiei se obţine şirul $(f(x_n))$ următor:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

care are limita 0.

În general, dacă (x_n) este un şir oarecare cu limita ∞, $x_n \to \infty$, avem $\frac{1}{x_n} \to 0$, adică $f(x_n) \to 0$.

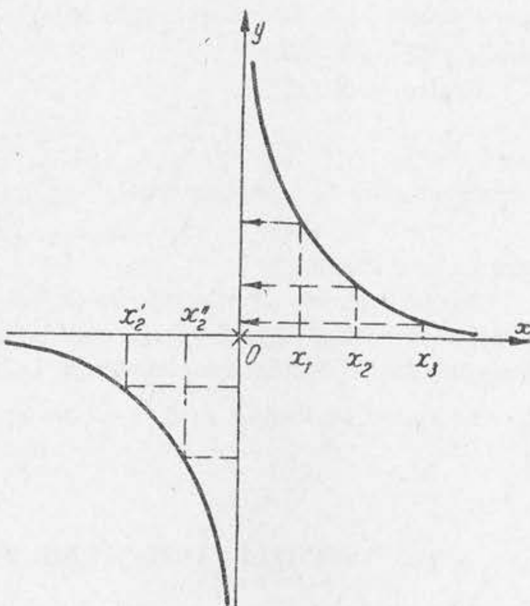


Fig. 79

Aşadar:

Oricare ar fi şirul $x_n \to \infty$, şirul $(f(x_n))$ are aceeaşi limită, 0.

Această proprietate se exprimă prescurtat astfel: *limita funcţiei* $f(x) = \frac{1}{x}$ *în punctul* ∞ *este* 0 şi se scrie:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{sau} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(Se citeşte *limită de* $f(x)$, *cînd* x *tinde către* ∞ *este* 0.)

4) Să reluăm funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ şi să studiem comportarea sa în jurul lui 0.

Pentru şirul (x_n):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

convergent către 0, se obţine şirul $(f(x_n))$ următor:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

care are limita ∞.

Pentru şirul (x'_n):

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$$

convergent către 0, se obţine şirul $(f(x'_n))$:

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots,$$

care are limita $-\infty$.

Pentru şirul (x''_n):

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

convergent către 0, se obţine şirul $(f(x''_n))$:

$$1, -2, 3, -4, \ldots,$$

care nu are limită.

Aşadar, pentru şirurile *diferite* (x_n) şi (x'_n) convergente către 0, şirurile corespunzătoare $(f(x_n))$ şi $(f(x'_n))$ *au limite diferite*, iar pentru şirul x''_n convergent către 0, şirul corespunzător $(f(x''_n))$ *nu are limită.*

Se spune că *funcţia* $f(x) = \frac{1}{x}$ *nu are limită* în 0.

§ 2. DEFINIŢIA LIMITEI UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

1. Consideraţiile din paragraful precedent conduc la următoarea

D e f i n i ţ i e. **Fie f o funcţie definită pe o mulţime A şi x_0 un număr (finit sau infinit). Dacă, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$, $(x_n \in A,\ x_n \neq x_0)$, şirul $f(x_n)$ are aceeaşi limită l (finită sau infinită), se spune că l este limita funcţiei f în punctul x_0** şi se scrie:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

(Se citeşte *limită de* $f(x)$, *cînd* x *tinde* către x_0, *este egală cu* l.)

Observaţii. 1° Condiţia $x_n \neq x_0$ are obiect numai în cazul cînd $x_0 \in A$. Dacă $x_0 \notin A$, în particular, dacă $x_0 = \infty$ sau $x_0 = -\infty$, condiţia $x_n \neq x_0$ este verificată în mod automat (deoarece $x_n \in A$), şi deci, în acest caz, condiţia $x_n \neq x_0$ este de prisos în enunţul definiţiei.

2° Dacă $x_0 \in A$, limita funcţiei f în x_0 (dacă există) poate fi diferită de $f(x_0)$.

De exemplu, pentru funcţia f definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ (v. exemplul 2) din § 1) şi $f(0) = 1$.

3° Pentru a putea considera limita funcţiei f în punctul x_0, trebuie mai întîi să *existe şiruri* (x_n) *de puncte din A cu limita* x_0 sau, cu alte cuvinte, după cum s-a specificat la începutul paragrafului, trebuie ca *oricît de aproape de* x_0 *să existe puncte din A diferite de* x_0. În caz contrar, definiţia nu se mai poate aplica, deci nu mai are sens problema existenţei limitei funcţiei într-un astfel de punct.

De exemplu, pentru funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $A = (0, \infty)$ nu are sens să se pună problema existenţei limitei acestei funcţii în punctul $x_0 = -1$, deoarece *nu* există puncte din $(0, \infty)$ oricît de apropiate de -1.

Exemple:

1) Pentru funcţia constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R (fig. 80) avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit), adică:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} c = c}$$

Într-adevăr, *oricare* ar fi şirul $x_n \to x_0$, şirul corespunzător $(f(x_n))$ al valorilor funcţiei este $c, c, c, ..., c, ...,$ care are limita c, $f(x_n) \to c$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

De exemplu, $\lim\limits_{x \to 1} 5 = 5$, $\lim\limits_{x \to 1} 6 = 6$, $\lim\limits_{x \to 3} 6 = 6$, $\lim\limits_{x \to \infty} (-2) = -2$ etc.

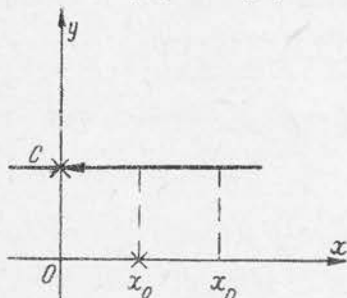


Fig. 80

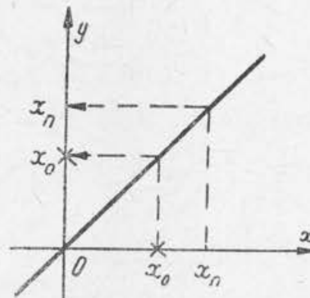


Fig. 81

2) Pentru funcţia identică $f(x) = x$ definită pe R (fig. 81) avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x = x_0}$$

oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). În particular:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} x = \infty} \quad \text{şi} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} x = -\infty}$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, deoarece $f(x_n) = x_n$, rezultă $f(x_n) \to x_0$ şi limita x_0 este *aceeaşi*, oricare ar fi şirul (x_n) considerat, deci $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

De exemplu, $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$, $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$ etc.

3) Pentru funcţia $f(x) = x^k$ (k natural), definită pe R, avem:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k}$$

oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). În particular:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^k = \infty} \quad \text{şi} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^k = (-\infty)^k}.$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, atunci $x_n^k \to x_0^k$.

De exemplu, $\lim\limits_{x\to-2} x^4 = 16$, $\lim\limits_{x\to3} x^3 = 27$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^6 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ etc.

4) Pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x^k}$ (k natural), definită pe $R - \{0\}$, avem:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}}$$

oricare ar fi $x_0 \neq 0$ (finit sau infinit). În particular:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0} \quad \text{şi} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0}$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, atunci $x_n^k \to x_0^k$ şi, dacă $x_0 \neq 0$, rezultă $\frac{1}{x_n^k} \to \frac{1}{x_0^k}$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}$.

De exemplu: $\lim\limits_{x\to2} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$, $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x^4} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^6} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ etc.

5) Dacă $\alpha > 0$, avem:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha} \quad (0 \leqslant x_0 < \infty).$$

În particular:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty} \quad \text{şi} \quad \boxed{\lim_{x\to0} x^\alpha = 0}$$

Pentru $\alpha = \frac{m}{n}$, se obţine:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x_0^m}} \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \sqrt[n]{x^m} = 0}$$

(Pentru demonstraţie, v. cap. IV, proprietatea corespunzătoare a şirurilor.)

6) Dacă $\alpha > 0$:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha}} \quad (0 < x_0 < \infty).$$

În particular:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\alpha} = \infty} \quad \text{şi} \quad \boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0}$$

(Se ţine seamă că, dacă $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, atunci $\frac{1}{x_n} \to \infty$.)

De exemplu: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x^n}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^n}}$, $(x_0 > 0)$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0$.

7) Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}}$$

oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). În particular,

dacă $a > 1$ $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0}$

dacă $0 < a < 1$ $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty}$

(Pentru demonstraţie, v. cap. IV.)

De exemplu: $\lim\limits_{x \to 5} e^x = e^5$, $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

8) S-a arătat (v. cap. III, § 2) că:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Se poate arăta că, oricare ar fi şirul $x_n \to \infty$, avem:

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e.$$

(Demonstraţia depăşeşte cadrul manualului.)
Rezultă:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

9) Fie acum un șir $x_n \to -\infty$; să notăm $y_n = -x_n$. Atunci $y_n \to \infty$, deci $y_n - 1 \to \infty$, și prin urmare:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \to e.$$

Dar:

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n - 1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right).$$

Deoarece $\frac{1}{y_n - 1} \to 0$, rezultă că $1 + \frac{1}{y_n - 1} \to 1$ și deci:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) \to e \cdot 1 = e,$$

adică:

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e.$$

Rezultă așadar că:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

2. Deoarece definiția limitei unei funcții într-un punct este bazată pe limite de șiruri, o serie de proprietăți ale limitelor de șiruri se regăsesc pentru limitele de funcții.

Două dintre aceste proprietăți sînt date în acest paragraf, iar celelalte vor fi date în paragrafele următoare.

Avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (l finit), *dacă, și numai dacă* $\lim_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$.

Într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to x_0 (x_n \neq x_0)$ avem $f(x_n) \to l$, dacă, și numai dacă, $f(x_n) - l \to 0$; deci $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă, și numai dacă, $\lim_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$.

Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci* $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

(Limita modulului este egală cu modulul limitei.)

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0 (x_n \neq x_0)$, atunci $f(x_n) \to l$, deci $|f(x_n)| \to |l|$ și, prin urmare, $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Exemple:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = |x_0|$, deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ și $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, deci $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0$ și $\lim\limits_{x \to 0} |\cos x - 1| = 0$.

§ 3. CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITELOR DE FUNCȚII

Uneori cunoscînd limita unei funcții într-un punct, putem stabili limita altei funcții în acest punct, cu ajutorul unor criterii asemănătoare celor utilizate la șiruri.

Teorema 1. Dacă $|f(x)| \leqslant h(x)$ și dacă $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Într-adevăr, fie $x_n \to x_0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$, rezultă că $h(x_n) \to 0$. Dar $|f(x_n)| \leqslant h(x_n)$ și, pe baza criteriului de la șiruri (v. cap. III, § 2), deducem $f(x_n) \to 0$. Deoarece limita 0 este independentă de șirul (x_n) ales, rezultă: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Exemple: 1) Pentru funcția $f(x) = \sin x$ avem: $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Într-adevăr, dacă x este măsurat în radiani, avem $|\sin x| \leqslant |x|$; dar $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ deci, pe baza teoremei de mai sus, rezultă $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Dacă x este măsura arcului în grade și dacă y este măsura arcului în radiani se știe că $x = \frac{180}{\pi} y$, de unde $|\sin x| = |\sin y| \leqslant |y| = \frac{\pi}{180} |x|$, adică $|\sin x| \leqslant \frac{\pi}{180} |x|$; deci $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

2) $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0} \quad (x_0 \text{ finit}).$$

Într-adevăr, deoarece $\left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 1$, avem $|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|$ și, deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$, și, deci, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

De exemplu, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim_{x \to \pi} \sin x = 0$ etc.

3) $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0}$$

Într-adevăr, deoarece $\left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 1$, avem:

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0|$$

și se continuă ca în exemplul 2).

De exemplu, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, $\lim_{x \to \pi} \cos x = -1$ etc.

Așadar, *limitele funcțiilor* $\sin x$ *și* $\cos x$ *într-un punct oarecare* x_0 *se obțin înlocuind direct pe* x *cu* x_0.

Observație. În punctele ∞ și $-\infty$ funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ nu au limită (v. exercițiul 9 de la acest capitol).

4) $$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0} \quad (n \text{ natural}).$$

Să arătăm mai întîi că, dacă $\alpha \geqslant 1$, avem $e^\alpha \geqslant \alpha$. Fie m un număr natural, astfel încît $m \leqslant \alpha \leqslant m + 1$. Atunci, $e^m \leqslant e^\alpha$; dar $e^m \geqslant m + 1$ (v. cap. I, aplicația 1 la inegalitatea lui Bernoulli, deci $e^\alpha \geqslant e^m \geqslant m + 1 \geqslant \alpha$, adică:

$$e^\alpha \geqslant \alpha.$$

Aplicînd logaritmii ultimei inegalități, se obține:

$$\alpha \geqslant \ln \alpha.$$

Acum putem scrie pentru $x \geqslant 1$:

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}}{x^n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{\ln x^{\frac{n}{2}}}{x^n} \leqslant \frac{2}{n} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}}.$$

Dar $$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\lim_{x \to \infty} x^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\infty} = 0,$$

și, pe baza teoremei 1, se deduce:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

Se spune că *funcția logaritmică* $\ln x$ *crește mai încet decît orice putere.*

Teorema 2. Dacă $f(x) \geqslant h(x)$ **și dacă** $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \infty$, **atunci** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, avem $h(x_n) \to \infty$ și, deoarece $f(x_n) \geqslant h(x_n)$, rezultă $f(x_n) \to \infty$ (v. cap. V), de unde:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Exemplu:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty}$$

Într-adevăr, deoarece $e^\alpha \geqslant \alpha$, $(\alpha \geqslant 1)$, avem:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2n}}\right)^{2n}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2n}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2n} \geqslant \left(\frac{\frac{x}{2n}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot x^n.$$

Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = \infty$, pe baza teoremei 2 rezultă:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Se spune că *funcția exponențială* e^x *crește mai repede decît orice putere.*

Teorema 3. Dacă $f(x) \leqslant h(x)$ **și dacă** $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -\infty$, **atunci**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Demonstrația este analogă celei a teoremei 2.

Exemplu: Deoarece pentru $x < -1$ avem $x^3 < x$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, rezultă $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ (v. de asemenea exemplul 3 din § 2).

§ 4. LIMITE LATERALE

S-a arătat în § 1 că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ nu are limită în 0, deoarece pentru șiruri diferite $x_n \to 0$ și $x'_n \to 0$, șirurile corespunzătoare $(f(x_n))$ și $(f(x'_n))$ au limite diferite. Totuși, dacă se consideră *numai* șiruri (x_n) de numere *strict*

pozitive ($x_n > 0$), convergente către 0, șirurile $(f(x_n))$ au aceeași limită, ∞. Într-adevăr, dacă $x_n > 0$ și $x_n \to 0$, avem $\frac{1}{x_n} \to \infty$, adică $f(x_n) \to \infty$.

Se spune că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ are în punctul 0 *limită la dreapta*, ∞.

De asemenea, dacă se consideră *numai* șiruri (y_n) de numere *strict negative* ($y_n < 0$), convergente către 0, șirurile $(f(y_n))$ au aceeași limită, $-\infty$. Într-adevăr, dacă $y_n < 0$ și $y_n \to 0$, avem $\frac{1}{y_n} \to -\infty$, adică $f(y_n) \to -\infty$.

Se spune că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ are în punctul 0 *limită la stînga*, $-\infty$.

Definiție. Fie f o funcție definită pe o mulțime A și x_0 un punct.

1) Dacă, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, format din puncte $x_n > x_0$ din A, șirul $(f(x_n))$ are aceeași limită l_d (finită sau infinită), se spune că l_d este limita la dreapta a funcției f în punctul x_0 și se scrie:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d.$$

2) Dacă, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, format din puncte $x_n < x_0$ din A, șirul $(f(x_n))$ are aceeași limită l_s (finită sau infinită), se spune că l_s este limita la stînga a funcției f în punctul x_0 și se scrie:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s.$$

Limita la stînga și limita la dreapta se numesc *limite laterale*.

În loc de l_s și l_d, limita la stînga și limita la dreapta a funcției f în x_0 se mai notează, respectiv, cu $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x), \qquad f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Astfel, pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ avem:

$$f(0 - 0) = -\infty \quad \text{și} \quad f(0 + 0) = \infty.$$

Observații. 1° Dacă f este o funcție definită pe un interval $A = (a, b)$, $(-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty)$, definiția limitei lui f în a, $\lim_{x \to a} f(x)$, coincide cu definiția limitei la dreapta a lui f în a, $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ deoarece, pentru șiruri (x_n) de puncte din A, avem în mod necesar $x_n > a$.

De asemenea, definiția limitei lui f în b coincide cu definiția limitei la stînga a lui f în b $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$, deoarece, dacă (x_n) este un șir de puncte din A, avem în mod necesar $x_n < b$.

2° Dacă funcția f are limita l într-un punct x_0, $(a < x_0 < b)$ atunci are și limită la dreapta și limită la stînga în x_0, și ambele limite laterale sînt egale cu l:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l.$$

Se poate demonstra că, reciproc, dacă f are în x_0 şi limită la stînga, $f(x_0 - 0)$, şi limită la dreapta, $f(x_0 + 0)$, şi dacă limitele laterale sînt egale, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, atunci f are limită în x_0 egală cu valoarea comună a limitelor laterale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

3° Se poate ca într-un punct una sau ambele limite laterale să nu existe.

De multe ori este mai uşor să se calculeze limitele laterale într-un punct şi din egalitatea lor să se deducă existenţa limitei în acel punct.

Exemple:

1)
$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Dacă $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, punînd $y_n = \frac{1}{x_n}$, avem $y_n \to \infty$ şi

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}.$$

Dar $\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e$ (v. § 2), deci $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. Deducem că limita la dreapta în 0 a funcţiei $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ este e:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

În mod asemănător, se arată că şi limita la stînga în 0 a acestei funcţii este e:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Cele două limite laterale fiind egale, rezultă că funcţia $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ are în punctul 0 limita e.

2)
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = \infty}$$

Dacă $x_n < 0$ şi $x_n \to 0$, avem $x_n^{2k} \to 0$ şi $x_n^{2k} > 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k}} \to \infty$. Aşadar limita la stînga în 0 este ∞.

De asemenea, dacă $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, avem $x_n^{2k} \to 0$ şi $x_n^{2k} > 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k}} \to \infty$; prin urmare şi limita la dreapta în 0 este ∞. Cele două limite laterale fiind egale, rezultă că funcţia $\frac{1}{x^{2k}}$ are limită în 0 egală cu ∞.

De exemplu, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \infty$ etc.

3) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty}$ şi $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2k+1}} = \infty}$

Se urmează acelaşi raţionament ca în exemplul funcţiei $\frac{1}{x}$ de la începutul acestui paragraf.

Urmează că funcţia $\frac{1}{x^{2k+1}}$ nu are limită în 0, deoarece limitele laterale sînt diferite.

De exemplu, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3} = \infty$ etc.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n < \frac{\pi}{2}$ şi $x_n \to \frac{\pi}{2}$, avem $\sin x_n \to 1$, apoi $\cos x_n > 0$ şi $\cos x_n \to 0$, deci $\frac{1}{\cos x_n} \to \infty$. Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\cos x_n} = \infty$.

Aşadar, limita la stînga a funcţiei $\operatorname{tg} x$ în $\frac{\pi}{2}$ este ∞.

Pentru demonstrarea celeilalte egalităţi se foloseşte faptul că, dacă $x_n > \frac{\pi}{2}$ şi $x_n \to \frac{\pi}{2}$, avem $\cos x_n < 0$ şi $\cos x_n \to 0$, deci $\frac{1}{\cos x_n} \to -\infty$.

Rezultă că funcţia $\operatorname{tg} x$ nu are limită în $\frac{\pi}{2}$.

5) Fie funcţia $f(x)$ definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

cu graficul din figura 82. Se vede că $f(0-0) = -1$ şi $f(0+0) = \infty$, deci funcţia nu are limită în 0.

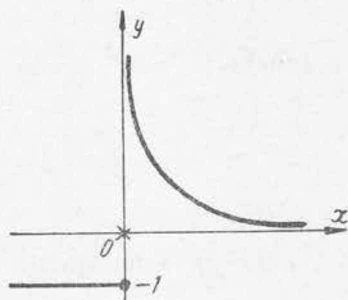


Fig. 82

6) Funcția $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are în punctul 0 nici limită la dreapta, nici limită la stînga.

Într-adevăr, dacă $x_n = \frac{1}{n\pi}$, avem $x_n > 0$ și $x_n \to 0$; apoi $\sin \frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$, deci $\sin \frac{1}{x_n} \to 0$.

Dacă $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ avem $y_n > 0$ și $y_n \to 0$; apoi $\sin \frac{1}{y_n} = \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1$, deci $\sin \frac{1}{y_n} \to 1$.

Așadar, pentru șirurile *diferite* (x_n) și (y_n), șirurile $\left(\sin \frac{1}{x_n}\right)$ și $\left(\sin \frac{1}{y_n}\right)$ *nu au aceeași limită*. Rezultă că funcția $\sin \frac{1}{x}$ nu are limită la dreapta în 0.

Se arată în mod analog, folosind șirurile $\left(-\frac{1}{n\pi}\right)$ și $\left(-\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)$ că funcția $\sin \frac{1}{x}$ nu are nici limită la stînga în 0.

§ 5. OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Fie f și g două funcții definite pe o mulțime A.

T e o r e m a 1. **Dacă funcțiile f și g au într-un punct x_0 respectiv limitele l_1 și l_2 (finite sau infinite) și dacă suma $l_1 + l_2$ are sens, atunci funcția $f + g$ are limită în x_0 și:**

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Caz exceptat : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ (cazul $\infty - \infty$).

Fie $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ un șir oarecare. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, se deduce că $f(x_n) \to l_1$ și $g(x_n) \to l_2$, deci $f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$ și, prin urmare, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.

Teorema este adevărată și pentru suma a n funcții. Această teoremă se enunță simplificat astfel :

Limita într-un punct x_0 a unei sume de funcții este egală cu suma limitelor acestor funcții în x_0.

T e o r e m a 2. Dacă f și g au în punctul x_0 respectiv limitele l_1 și l_2 (finite sau infinite) și dacă produsul $l_1 l_2$ are sens, atunci funcția fg are limită în x_0 și:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Cazuri exceptate: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm \infty$ (cazul $0 \cdot \infty$).

Demonstrația este analogă aceleia a teoremei 1, folosind teorema relativă la limita produsului a două șiruri.

În particular, dacă $g(x) \equiv c$, avem $\lim_{x \to x_0} g(x) = c$, deci:

C o r o l a r. Dacă f are în x_0 limita l (finită sau infinită), atunci, funcția cf are limită în x_0 și

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)} \quad \text{dacă } c \neq 0$$

(și, evident, $\lim_{x \to x_0} cf(x) = 0$, dacă $c = 0$).

Luînd în corolarul precedent $c = -1$, obținem:

$$\lim_{x \to x_0} [-f(x)] = -\lim_{x \to x_0} f(x)$$

și deci:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Teorema 2 este adevărată și pentru produsul a n funcții. Această teoremă se enunță simplificat astfel:

Limita într-un punct x_0 a unui produs de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții în x_0.

În particular, luînd n funcții egale cu f, se obține:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n \ (n \text{ natural}).$$

Exemple:

1) Deoarece $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, avem $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ (n natural).

2) $\lim_{x \to x_0} cx^n = c \lim_{x \to x_0} x^n = cx_0^n$.

3) Pentru orice polinom $P(x)$, avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)} \quad (x_0 \text{ finit}).$$

Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Folosind exemplele 1) şi 2) şi teorema 1, se obţine:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 =$$
$$= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

Aşadar, *limita unui polinom $P(x)$ într-un punct x_0 se obţine înlocuind direct în polinom pe x cu x_0.*

De exemplu, $\lim_{x\to -2}(5x^4 + 3x^2 - 7x + 1) = 5(-2)^4 + 3(-2)^2 - 7(-2) + 1 = 107.$

Teorema 3. **Dacă f şi g au într-un punct x_0 respectiv limitele l_1 şi l_2 (finite sau infinite) şi dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ are sens, funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi:**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Cazuri exceptate: $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$; $\left(\text{cazul } \frac{1}{0}\right)$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ şi } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \left(\text{cazul } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Pentru demonstraţie se foloseşte teorema relativă la limita cîtului a două şiruri.

Această teoremă se enunţă simplificat astfel:

Limita într-un punct x_0 a cîtului a două funcţii este egală cu cîtul limitelor acestor funcţii în x_0.

Exemple: 1) Dacă $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt două polinoame şi dacă $Q(x_0) \neq 0$, atunci:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad (x_0 \text{ finit}).$$

Într-adevăr, $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$.

Deci:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Așadar, *limita unei funcții raționale, într-un punct x_0 în care numitorul nu se anulează, se obține înlocuind direct pe x cu x_0.*

De exemplu:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \frac{1^2 - 5}{1 + 3} = \frac{-4}{4} = -1.$$

2) Dacă $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (k întreg), avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0}$$

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$.

Deci

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

3) Dacă $x_0 \neq k\pi$ (k întreg), avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0}$$

Se procedează ca la exemplul 2.

Așadar, *limita funcțiilor* $\operatorname{tg} x$ *și* $\operatorname{ctg} x$, *într-un punct x_0 în care sînt definite, se obține înlocuind direct pe x cu x_0.*

4) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$ (x măsurat în radiani).

Deoarece x este măsurat în radiani, avem $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$. Pentru $x \neq 0$ avem $\sin x \neq 0$ și, împărțind cu $|\sin x|$, se obține:

$$1 \leqslant \frac{|x|}{|\sin x|} \leqslant \frac{1}{|\cos x|}.$$

Dar, pentru $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, avem $\cos x > 0$, deci $|\cos x| = \cos x$; x și $\sin x$ avînd același semn, rezultă $\frac{|x|}{|\sin x|} = \frac{x}{\sin x}$, astfel încît șirul de inegalități de mai sus se scrie:

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

şi, scăzînd 1 în toţi membrii, se obţine :

$$0 \leqslant \frac{x}{\sin x} - 1 \leqslant \frac{1}{\cos x} - 1.$$

Dar, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} - 1 = 0$.

Aplicînd teorema 1 de la § 3, se obţine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} - 1 = 0$, deci :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

5)
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Într-adevăr, dacă $\sin x \neq 0$, avem $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}}$ şi se aplică teorema 3.

Observaţie. Dacă x este măsura arcului în *grade* şi dacă y este măsura aceluiaşi arc în radiani, atunci $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{180}{\pi} y} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sin y}{y}$.

Dacă $x_n \to 0$, atunci $y_n = \frac{\pi}{180} x_n \to 0$, deci $\frac{\sin y_n}{y_n} \to 1$, de unde $\frac{\sin x_n}{x_n} \to \frac{\pi}{180}$, adică $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$.

Alegerea radianului ca unitate de măsură a arcelor prezintă deci avantajul că la calculul unor limite se obţine un rezultat mai simplu. Acesta este motivul pentru care, în analiza matematică, arcele sînt măsurate în radiani.

6)
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1} \quad (\alpha \neq 0).$$

Dacă $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$, notînd $y_n = \alpha x_n$, avem $y_n \to 0$, deci $\frac{\sin y_n}{y_n} \to 1$, adică $\frac{\sin \alpha x_n}{\alpha x_n} \to 1$. Cum şirul (x_n) este arbitrar, se deduce :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1.$$

Teorema 4. Dacă funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ au în punctul x_0 respectiv limitele a și α, și dacă $u(x) > 0$ și a^α are sens, atunci funcția $u(x)^{v(x)}$ are limită în x_0 și:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = (\lim_{x \to x_0} u(x))^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)} = a^\alpha}$$

Cazuri exceptate: $a = 0$ și $\alpha = 0$ (cazul 0^0);
$a = 1$ și $\alpha = \infty$ (cazul 1^∞);
$a = \infty$ și $\alpha = 0$ (cazul ∞^0).

Demonstrația se face ca în teoremele precedente, folosind teorema corespunzătoare de la șiruri:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n)^{y_n} = (\lim_{n \to \infty} x_n)^{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}.$$

Cazuri particulare:

1) Dacă $v(x) \equiv \alpha$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \alpha$, deci:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [u(x)]^\alpha = [\lim_{x \to x_0} u(x)]^\alpha}$$

(Cu excepția cazului cînd $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ și $\alpha \leqslant 0$.)

În particular, $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}$.

2) Dacă $u(x) \equiv a$, $a > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a$, deci:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} a^{v(x)} = a^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}}$$

Exemple:

1) Dacă funcțiile $u(x) = \sin x$ și $v(x) = \cos x$ sînt definite pe $(0, \pi)$, avem:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x)^{\cos x} = (\lim_{x \to 0} \sin x)^{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = 0^1 = 0.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} e^{x^2+1} = e^{\lim\limits_{x \to 0} (x^2+1)} = e^1 = e.$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\sin x + 4} = \lim\limits_{x \to 0} (\sin x + 4)^{\frac{1}{2}} = [\lim\limits_{x \to 0} (\sin x + 4)]^{\frac{1}{2}} =$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 0} (\sin x + 4)} = \sqrt{4} = 2.$$

§ 6. CAZURI DE EXCEPȚIE LA OPERAȚIILE CU LIMITE DE FUNCȚII

Regulile stabilite în paragraful precedent pentru operațiile cu limite de funcții nu se pot aplica în cazurile exceptate, cînd operațiile cu aceste limite nu au sens, cazuri desemnate prin: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Pentru a putea stabili dacă în aceste cazuri există limită, trebuie întreprins un studiu direct asupra funcțiilor.

Pentru funcțiile elementare se procedează, în esență, astfel *:

Pentru a calcula limita unei funcții într-un punct x_0, se înlocuiește argumentul x cu x_0; dacă se obține un număr bine determinat (finit sau infinit), acest număr este limita funcției în x_0; *dacă se obține una din operațiile fără sens, uneori se fac anumite transformări pentru a obține o funcție egală cu cea inițială* (pentru $x \neq x_0$), *astfel încît, înlocuind în noua funcție pe* x *cu* x_0, *să nu mai ajungem la o operație fără sens, ci la un număr bine determinat, care este limita funcției în* x_0; *alteori se folosesc limitele fundamentale* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

1. Limita polinoamelor în punctele ∞ și $-\infty$.

S-a arătat în § 2 (exemplul 4) că $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty^n$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = (-\infty)^n$ și, deci, dacă $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} ax^n = a(\infty)^n$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = a(-\infty)^n$.

De exemplu: $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (-x) = -\infty$.

Pentru polinomul $P(x) = 3x^2 - x$ nu putem aplica regula limitei sumei, deoarece, pentru $x_0 = \infty$, sîntem în cazul $\infty - \infty$.

Pentru calculul limitei unui polinom în punctele ∞ sau $-\infty$ avem regula următoare:

Pentru orice polinom:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

avem:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} P(x) = a_n \infty^n} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} P(x) = a_n(-\infty)^n}$$

---

* Pentru funcția logaritmică și funcțiile circulare inverse vezi capitolul VIII.

Așadar, *limita unui polinom în punctele* ∞ *sau* $-\infty$ *este egală cu limita termenului de cel mai înalt grad.*

Într-adevăr, scoțînd în $P(x)$ factor comun pe x^n, se obține

$$P(x) = x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right).$$

Se observă că factorii din paranteză care conțin pe x la numitor au limita 0 în punctul ∞ sau $-\infty$, deci limita parantezei este a_n. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\infty}(a_n + \ldots) = a_n \cdot \infty^n.$$

La fel se calculează limita în punctul $-\infty$.

De exemplu:

$$\lim_{x\to\infty}(-5x^4 + 3x^2 - 7) = -5 \cdot \infty^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^5 + 2x - 1) = -3(-\infty)^5 = \infty.$$

2. Limita funcțiilor raționale în punctele ∞ și $-\infty$.

Unei funcții raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nu i se poate aplica regula limitei cîtului pentru calcularea limitei în punctele ∞ și $-\infty$, deoarece sîntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

De exemplu, dacă $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, avem $\lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty$ și $\lim_{x\to\infty}(x^2-1) = \infty$.

Pentru calculul limitei în punctul ∞ sau $-\infty$ avem regulile următoare:
Fie funcția rațională:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0).$$

1) *Dacă gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului,* $n < m$, *limita funcției raționale în punctele* ∞ *și* $-\infty$ *este* 0:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = 0} \quad \text{și} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$$

Pentru demonstrație, se împart atît numărătorul, cît și numitorul cu x^n (exponentul n fiind *cel mai mic* dintre gradele celor două polinoame) și se obține:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m x^{m-n} + \ldots + b_0\frac{1}{x^n}} \quad (x \neq 0).$$

Termenii care conțin pe $\frac{1}{x}$ au limita 0. Numărătorul are deci limita a_n, iar numitorul are limita infinită.

Rezultă că $\frac{P(x)}{Q(x)}$ are limita 0.

De exemplu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 5x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 3}{4x^7 + 2x - 1} = 0.$$

2) *Dacă gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului, $n = m$, atunci limita funcției raționale în punctul ∞ sau $-\infty$ este egală cu raportul coeficienților termenilor de cel mai înalt grad:*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}} \quad \text{și} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}}$$

Pentru demonstrație, se împart și numărătorul și numitorul cu x^n și se obține:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0\frac{1}{x^n}} \quad (x \neq 0).$$

Numărătorul are limita a_n, iar numitorul are limita b_n, deci funcția rațională are limita $\frac{a_n}{b_n}$.

De exemplu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x + 7}{-x^3 + 4x - 5} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-7x^4 + 3}{8x^4 - 2x + 2} = \frac{-7}{8}.$$

3) *Dacă gradul numărătorului este mai mare decît gradul numitorului $n > m$, funcția rațională are în punctele ∞ și $-\infty$ limita infinită, și anume:*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \infty^{n-m}} \quad \text{și} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}(-\infty)^{n-m}}$$

Numărătorul şi numitorul se împart cu x^m (m fiind *cel mai mic* dintre gradele numărătorului şi numitorului) şi se obţine:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^{n-m} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^m}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^m}} \quad (x \neq 0).$$

Limita numitorului este b_m, limita numărătorului în punctul ∞ este $a_n \infty^{n-m}$ şi în punctul $-\infty$ este $a_n(-\infty)^{n-m}$, de unde rezultă că limita funcţiei raţionale este dată de egalităţile de mai sus.

De exemplu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 2x + 4}{-2x^2 + 3} = \frac{3}{-2}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - 2x + 4}{-2x^2 + 3} = \frac{3}{-2}(-\infty)^{5-2} = -\frac{3}{2}(-\infty) = \infty.$$

3. Limita funcţiilor raţionale în punctele în care se anulează numitorul

Fie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ o funcţie raţională şi x_0 un punct în care se anulează numitorul, $Q(x_0) = 0$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) = 0$, nu se poate aplica regula limitei cîtului.

În acest caz, se face un studiu direct al funcţiei raţionale.

1) Dacă $P(x_0) \neq 0$ şi $Q(x_0) = 0$, funcţia raţională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ are în punctul x_0 limite laterale infinite, dar, eventual, diferite. Dacă x_0 este rădăcină de ordin par a numitorului Q, limitele laterale sînt egale.

Exemple:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x+7}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+7}{x^2} = \infty$;

deci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+7}{x^2} = \infty.$$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \frac{3x^3+2x}{x+3} = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \frac{3x^3+2x}{x+3} = -\infty$.

Deoarece limitele laterale sînt diferite, funcția nu are limită în -3.

2) Dacă $P(x_0) = 0$ și $Q(x_0) = 0$, polinoamele P și Q se scriu

$$P(x) = (x - x_0) P_1(x) \text{ și } Q(x) = (x - x_0) Q_1(x).$$

Prin urmare, pentru $x \neq x_0$ avem :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Dacă funcția $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ are limită în punctul x_0, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Problema revine deci la cercetarea limitei funcției $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ în punctul x_0.

Exemple :

1) Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. Să studiem limita acestei funcții în punctul 3.

Se observă că $P(3) = 0$ și $Q(3) = 0$, deci pentru $x \neq 3$ avem :

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$$

și prin urmare :

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\to3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

2) Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+x-2}{(x+2)^3}$. Să studiem limita acestei funcții în punctul -2. Se observă că $P(-2) = 0$ și $Q(-2) = 0$; deci pentru $x \neq -2$ avem

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)^3} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$$

și, prin urmare :

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2+x-2}{(x+2)^3} = \lim_{x\to-2} \frac{x-1}{(x+2)^2} = -\infty.$$

3) Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-3}{(x-1)^2}$. Avem $P(1) = 0$ și $Q(1) = 0$; deci, pentru $x \neq 1$,

$$\frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}.$$

Atunci:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3x - 3}{(x - 1)^2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3}{x - 1} = -\infty$$

şi:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3x - 3}{(x - 1)^2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3}{x - 1} = \infty.$$

Aşadar, funcţia considerată nu are limită în punctul 1.

4) Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$. Se observă că $P(3) = 0$ şi $Q(3) = 0$; deci, pentru $x \neq 3$:

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 3)(x^2 - x - 6)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Dar: $P_1(3) = 0$ şi $Q_1(3) = 0$; deci, pentru $x \neq 3$:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Atunci:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{4}{5}.$$

4. Limitele unor funcţii în cazul de excepţie 1^∞*.

S-a arătat că $\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$; (deci, dacă $y_n \to 0$, atunci $(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \to e$).

Dacă $\lim_{x \to x_0} z(x) = 0$, *atunci:*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [1 + z(x)]^{\frac{1}{z(x)}} = e}$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, atunci, notînd $y_n = z(x_n)$, avem $y_n \to 0$, deci $(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \to e$, adică $[1 + z(x_n)]^{\frac{1}{z(x_n)}} \to e$, deci $\lim_{x \to x_0} [1 + z(x)]^{\frac{1}{z(x)}} = e$.

* Cazurile 0^0 şi ∞^0 nu intervin în acest manual.

De exemplu:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e,\quad \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x-1})^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}} = e \text{ etc.}$$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, studiind limita funcţiei $[u(x)]^{v(x)}$ în punctul x_0, constatăm că sîntem în cazul 1^∞.

În astfel de situaţii se caută să se folosească limita de mai sus.

Exemplu:

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = \left(1-1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x^2} = \left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2x^2}{x+1}}.$$

Dar, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}} = e$ $\left(\text{deoarece } \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1} = 0\right)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2x^2}{x+1}\right) = -\infty$,

deci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = e^{-\infty} = 0$.

RECAPITULAREA UNOR LIMITE IMPORTANTE

I. *Polinoame:*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)} \quad (x_0 \text{ finit}).$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) = a_n(\pm\infty)^n}$$

II. *Funcţii raţionale:*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}} \quad (Q(x_0)\neq 0,\ x_0 \text{ finit}).$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ \frac{a_n}{b_m}\cdot(\pm\infty)^{n-m}, & \text{dacă } n > m \end{cases}}$$

III. *Funcția putere* $\left(\sqrt[n]{x^m} \text{ și } \frac{1}{\sqrt[n]{x^n}}\right)$:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x_0^m}} \quad (x_0 \text{ finit sau } +\infty).$$

În particular:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0^n}}} \quad (0 < x_0 \leqslant \infty).$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \infty}$$

IV. *Funcția exponențială* e^x:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}} \quad (x_0 \text{ finit sau infinit}).$$

În particular:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} e^x = \infty}$$

V. *Funcții circulare:*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0} \qquad \boxed{\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0} \quad (x_0 \text{ finit}).$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0} \quad \left(x_0 \text{ finit, } x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0} \quad (x_0 \text{ finit, } x_0 \neq k\pi).$$

VI. *Alte limite:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$$

EXERCIȚII

Aplicînd definiția limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{7}$.

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x+5}{(x-1)^2} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+x+5}{3x^2-2x+1} = \frac{2}{3}$.

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+5}{4x^3-x^2+1} = \frac{1}{4}$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-x+1}{x-3} = \infty$.

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} = \infty$.

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^5+x^4}{x^2-8} = -\infty$.

9. Să se arate că funcțiile:

$$f_1(x) = \sin x; \quad f_2(x) = \cos x; \quad f_3(x) = \operatorname{tg} x; \quad f_4(x) = \operatorname{ctg} x$$

nu au limită în punctul ∞.

Aplicînd criteriile de la § 3, să se calculeze limitele următoare:

10. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} x \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin^{\alpha} x}{x^{\beta}}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

14. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 + x + 5)$.

15. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x + 1)$.

16. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x+3}{(2x-1)^2}$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{2x^2+x+1}$.

18. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\sqrt{x^3}}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$.

20. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x-1)}{x^3}$.

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(\sin x + 2)}{x^6}$.

Ținînd seama de definiția limitelor laterale ale unei funcții într-un punct, să se arate că:

22. Funcția $f(x) = \frac{3}{x+7}$ nu are limită în punctul $x = -7$.

23. Funcția $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ nu are limită nici în punctul $x = -1$, nici în punctul $x = 1$.

24. Funcția $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2 - 6x + 9)}$ nu are limită în punctul $x = 2$, dar are limită în punctul $x = 3$.

25. Funcția $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ nu are limită în punctul $x = 0$.

26. Funcția $f(x) = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x-8}}}$ nu are limită în punctul $x = 8$.

Aplicînd teoremele asupra operațiilor cu limite de funcții, să se calculeze limitele următoare:

27. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 5x + 2)$.

28. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^3 e^x - x^2 + 5)$.

29. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}$.

30. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} (2x^3 - 5 \sin x)$.

31. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (x - 1) \sin^2 x$.

32. $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{4}} (x^3 \cos x + 7 \operatorname{tg} x)$.

33. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^3 + x^2 + 3x - 8)$.

34. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - 2x - 7x^2)$.

35. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 1)$.

36. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 + 5x + 7)$.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{3x}$.

38. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$.

40. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{k}}{x^2}$ $(k \neq 0)$.

41. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

42. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x \sin x}{x^2}$.

43. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

44. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$.

45. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

46. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

47. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - x + 1}$.

48. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (x^4 - 3x^2 + 3)^{\sqrt{3}}$

49. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 3x^2)^{\pi}$.

50. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 + 1}$.

51. $\lim\limits_{x \to -2} e^{3x^2 - x + 1}$.

52. $\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}} 10^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

53. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x e^{\operatorname{ctg} x}$.

54. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

55. $\lim\limits_{x \to 1} a^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ $(0 < a < 1)$.

56. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1-x}{x^6}}$

57. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x^2 + 5x + 1}$.

58. $\lim\limits_{x \to \infty} a^{3 - x - x^2}$ $(a > 1)$.

59. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^3 + x + 2}$.

60. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^4 + x^2 + 9x}$

61. $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}04)^{2x^3 - x^2}$.

62. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x^4 + 3x^3 - x + 1}$ $(0 < a < 1)$.

Utilizînd indicațiile din paragraful consacrat cazurilor de excepție, să se calculeze limitele următoare:

63. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 13x^3 + 6x^2 + 1)$.

64. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + 7\right)$.

65. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^9 - 20x^7 + x - 19)$.

66. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 13x^2 - 2x^7)$.

67. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1-x)(x^2+3)}{5x^3 - 2}$.

68. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(2x+1)(1-3x)}{x^2 + x + 1}$.

69. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 5}{2x^3 - 17x^2 + 1}$.

70. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 4}{1 - 2x}$.

71. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2 - 6x - x^2}{3x + 7}$.

72. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 7x^4}{9x^2 - 2}$.

73. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 1}{5 + x^3}$.

74. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 - 2x^2}{3x^6 + x^3 + 2x^2}$.

75. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

76. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{(x-1)^2}$.

77. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

78. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

79. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$.

80. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

81. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$.

82. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3 + x + x^2} - \sqrt{9 - 2x + x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

83. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$.

84. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{2x^3-5}{x^2+1}}$.

85. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{\frac{x^4+2x-1}{3x^2-5}}$ $(0 < a < 1)$.

86. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

87. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

88. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$.

89. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

90. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

91. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

92. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

CAPITOLUL VIII

FUNCŢII CONTINUE

§ 1. DEFINIŢIA CONTINUITĂŢII

În limbajul obişnuit, a spune că o linie curbă este *continuă* înseamnă a spune că ea *nu are întreruperi*. Dacă într-un punct curba se întrerupe, spunem că în acest punct ea nu este continuă sau că este *discontinuă*.

În particular, curba poate fi graficul unei funcţii. Se pune atunci problema să vedem la ce revine pentru funcţie această proprietate intuitivă de „continuitate" a graficului său. Pentru aceasta, să considerăm mai întîi un exemplu simplu.

Fie f funcţia definită pe intervalul $[0,3]$ în felul următor:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{dacă } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & \text{dacă } 1<x<2;\\ 2, & \text{dacă } x=2;\\ 1, & \text{dacă } 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

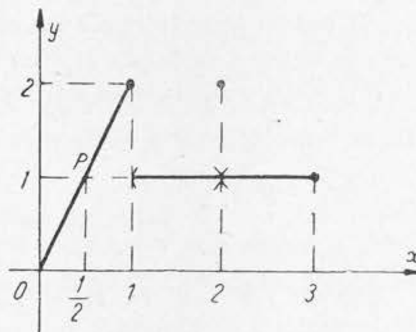


Fig. 83

Graficul acestei funcţii este trasat în figura 83.

Observăm că acest grafic se întrerupe în dreptul absciselor 1 şi 2 din domeniul de definiţie al funcţiei. Să considerăm punctul $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. În acest punct, curba nu se întrerupe, este continuă. Să calculăm limita funcţiei în punctul $\frac{1}{2}$. În jurul punctului $\frac{1}{2}$ (pentru $0\leqslant x\leqslant 1$) avem $f(x)=2x$, deci $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x=1$.

Din definiţia funcţiei f se observă că valoarea sa în punctul $\frac{1}{2}$ este de asemenea 1, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Aşadar, *funcţia are limită în punctul* $\frac{1}{2}$ *şi limita este egală cu valoarea funcţiei în acest punct:*

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Altfel spus, pentru a calcula limita funcţiei în punctul $\frac{1}{2}$, putem înlocui în expresia funcţiei pe x cu $\frac{1}{2}$.

Dacă luăm alt punct de pe grafic, de abscisă x_0, *în care curba nu se întrerupe (este continuă)*, va rezulta în mod analog *că funcţia are limită în punctul* x_0 *şi limita este egală cu valoarea funcţiei în acest punct:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Altfel spus, *dacă într-un punct de abscisă* x_0 *graficul nu se întrerupe, atunci limita funcţiei în punctul* x_0 *se obţine înlocuind direct în expresia funcţiei pe* x *cu* x_0.

Să vedem ce se întîmplă în punctul de abscisă 1, în care curba se întrerupe. Se observă că limita la stînga este $f(1-0) = 2$, iar limita la dreapta este $f(1+0) = 1$. Într-adevăr:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2;$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x \to 1} 1 = 1.$$

Aşadar, $f(1-0) \neq f(1+0)$, deci *funcţia nu are limită în punctul* 1.

În punctul de abscisă 2, în care curba de asemenea se întrerupe, limitele la stînga şi la dreapta sînt egale, $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = 1$, deci funcţia are limita 1 în punctul 2:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

Observăm însă că $f(2) = 2$, deci *limita în punctul* 2 *există, dar este diferită de valoarea* $f(2)$ *a funcţiei în acest punct.*

Aşadar, pentru ca graficul să fie continuu într-un punct de abscisă x_0, *nu este suficientă numai existenţa limitei funcţiei în punctul* x_0; *în plus, această limită trebuie să fie egală cu valoarea funcţiei în punctul* x_0.

Consideraţiile de mai sus conduc la următoarea

D e f i n i ț i e. Se spune că o funcție f definită pe un interval I este continuă într-un punct $x_0 \in I$ dacă funcția are limită în punctul x_0 și dacă această limită este egală cu $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Intuitiv, aceasta înseamnă că, dacă x este din ce în ce mai apropiat de x_0, $f(x)$ este de asemenea din ce în ce mai apropiat de $f(x_0)$, și anume, putem realiza ca $f(x)$ să fie *atît cît dorim* de apropiat (vecin) de $f(x_0)$, dacă x este *suficient* de apropiat (vecin) de x_0. Această observație sugerează o formulare în limbaj de vecinătăți a definiției de mai sus.

Funcția f este continuă în x_0 dacă pentru fiecare vecinătate U a lui $f(x_0)$ se poate găsi o vecinătate V a lui x_0, astfel încît orice punct x din vecinătatea V a lui x_0 să aibă imaginea $f(x)$ în vecinătatea U a lui $f(x_0)$ (v. fig. 84).

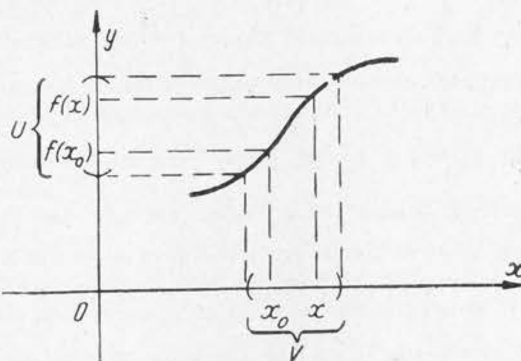


Fig. 84

Ținînd seama de definiția limitei unei funcții într-un punct (v. capitolul VII, § 2), egalitatea $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ înseamnă că, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$ ($x_n \in I$, $x_n \neq x_0$), avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dar, deoarece $f(x_0)$ este limita șirului $(f(x_n))$, o parte din termenii $f(x_n)$ (sau chiar toți) pot fi egali cu limita $f(x_0)$, ceea ce înseamnă că o parte din termenii x_n (sau chiar toți) pot fi egali cu x_0, astfel încît restricția $x_n \neq x_0$ din definiția limitei unei funcții în x_0 este de prisos în cazul cînd această limită este $f(x_0)$.

Am obținut astfel următoarea

T e o r e m ă. O funcție f definită pe un interval I este continuă într-un punct $x_0 \in I$ dacă, și numai dacă, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$ ($x_n \in I$), avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dacă funcția f *nu* este continuă într-un punct a *din domeniul ei de definiție I*, se spune că este *discontinuă* în punctul a. După cum rezultă și din exemplul de mai sus, o funcție f este discontinuă în a fie în cazul cînd funcția nu are limită în a, fie în cazul cînd, deși funcția f are limită în a, limita este diferită de valoarea $f(a)$ a funcției în acest punct.

Observație importantă. Pentru a stabili dacă o funcție este *continuă* sau *discontinuă* într-un punct x_0, trebuie să comparăm limita funcției în punctul x_0 cu *valoarea* $f(x_0)$ a funcției în acest punct. Pentru aceasta, trebuie ca f să fie definită în x_0, adică *punctul x_0 să aparțină domeniului de definiție al funcției f.*

În punctele în care funcția nu este definită, nu are sens să se pună problema continuității sau a discontinuității.

Astfel, funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ *nu este definită* în punctul $x = \frac{\pi}{2}$, așa încît nu trebuie spus nici că este continuă, nici că este discontinuă în punctul $\frac{\pi}{2}$; problema continuității sau discontinuității în acest punct nu are sens.

Pentru funcția $f(x) = \log_a x$ nu are sens să se spună că este discontinuă în punctul 0 sau în punctul — 3, deoarece nu este definită în aceste puncte.

De asemenea, dacă $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este raportul a două funcții P și Q și dacă x_0 este o rădăcină a numitorului $Q(x_0) = 0$, funcția nu este definită în x_0, deci nu are sens să se pună problema continuității sau a discontinuității în acest punct, *chiar dacă funcția are limită în* x_0. De exemplu, funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nu este definită în punctul 0, deoarece numitorul se anulează în acest punct. Funcția are, însă, limită în punctul 0, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Totuși, nu vom spune că funcția este discontinuă în punctul 0.

Observație. Noțiunea precisă de continuitate a funcțiilor a fost dedusă din noțiunea intuitivă de neîntrerupere a curbelor, dar aceste două noțiuni nu sînt în totul echivalente. Astfel, graficul funcției $\operatorname{tg} x$ se întrerupe în dreptul punctului $\frac{\pi}{2}$, dar nu spunem că $\operatorname{tg} x$ este discontinuă în $\frac{\pi}{2}$ (deoarece nu este definită în acest punct).

Pe de altă parte, există unele funcții cărora nu le putem trasa graficul, dar le putem aplica definiția continuității, astfel încît în acest caz nu mai putem compara noțiunea de continuitate a funcției cu cea de neîntrerupere a graficului. De exemplu, funcția

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \text{ irațional} \\ 0 & \text{pentru } x \text{ rațional} \end{cases}$$

este continuă în 0 (deoarece) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ și $f(0) = (0)$, dar nu-i putem trasa graficul, ca să putem constata că nu se întrerupe în origine.

Definiție. Se spune că o funcție este continuă pe un interval I, dacă este continuă în fiecare punct din I.

Din considerațiile de mai sus rezultă că, pentru ca o funcție să fie continuă pe un interval I, trebuie ca acest interval să fie conținut în domeniul de definiție al funcției.

Dacă o funcție este continuă pe tot domeniul ei de definiție, se spune — mai simplu — că este continuă (fără altă specificație asupra mulțimii pe care este continuă).

Funcțiile elementare sînt continue. Într-adevăr (v. cap. VII. § 2, § 3 și § 6) :

1) Dacă $P(x)$ este un polinom, avem $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

2) Dacă $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este o funcție rațională și dacă $Q(x_0) \neq 0$, avem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

3) Dacă $x_0 > 0$, avem $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$; dacă $x_0 = 0$ și $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

În particular, luînd $\alpha = \frac{m}{n}$, deducem:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x_0^m} \ (x_0 \geqslant 0).$$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ $(a > 0)$.

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

7) Pentru $\cos x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$.

8) Pentru $\sin x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$.

Așadar, *polinoamele, funcțiile raționale, funcția putere, funcția exponențială și funcțiile circulare sînt funcții continue (pe tot domeniul lor de definiție).* Se va arăta mai departe că și celelalte funcții elementare — funcția logaritmică și funcțiile circulare inverse — sînt de asemenea continue.

§ 2. OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

Deoarece definiția continuității este bazată pe limite de funcții, o serie de proprietăți ale limitelor de funcții se regăsesc la funcțiile continue.

1. Operații algebrice

Teoremă. Dacă f și g sînt două funcții continue pe un interval I, atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, fg, αf (α număr real) sînt continue pe I, iar $\frac{f}{g}$ este continuă pe domeniul său de definiție (format din toate punctele $x \in I$, în care $g(x) \neq 0$).

Fie $x_0 \in I$ un punct oarecare; f şi g, fiind continue pe I, sînt în particular continue în x_0. Deci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Din proprietăţile operaţiilor cu limite de funcţii (v. cap. VII, § 5) se deduce:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0),$$

deci $f + g$ este continuă în x_0. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar în I, rezultă că $f + g$ este continuă pe tot intervalul I.

La fel se demonstrează şi continuitatea funcţiilor $f - g$, fg, αf, $\frac{f}{g}$.

Din aproape în aproape, se deduce că suma sau produsul mai multor funcţii continue este de asemenea o funcţie continuă.

Exemple:

1) $f(x) = e^x + \cos x + (2x^2 + 3)$ este continuă pe R, ca sumă a trei funcţii continue, e^x, $\cos x$ şi polinomul $2x^2 + 3$.

2) $f(x) = \sqrt{x}\, a^x \sin x$ este continuă pe $[0, \infty)$, ca produs a trei funcţii continue pe $[0, \infty)$.

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă pe $R - \{0\}$ ca fiind cîtul $\frac{u}{v}$ a două funcţii continue — funcţia constantă $u(x) = 1$ şi funcţia identică $v(x) = x$.

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ este continuă pe $[0, \infty) - \{1\}$ deoarece este cîtul a două funcţii continue pe $[0, \infty)$, iar numitorul se anulează în punctul 1.

2. Continuitatea funcţiilor compuse

Teoremă. Orice funcţie obţinută prin compunerea a două funcţii continue este continuă.

Fie $f(x) = \varphi(u(x))$ o funcţie compusă definită pe un interval I. Funcţia $u(x)$ este definită tot pentru $x \in I$, iar funcţia $\varphi(u)$ este definită pe un interval J, care conţine toate valorile $u(x)$, $(x \in I)$.

Fie x_0 un punct oarecare din I. Să arătăm că f este continuă în x_0. Pentru aceasta, să alegem un şir oarecare (x_n) de puncte din I, convergent către x_0:

$$x_n \to x_0.$$

Funcţia $u(x)$ fiind continuă în x_0, avem $u(x_n) \to u(x_0)$; dar $\varphi(u)$ este continuă în punctul $u_0 = u(x_0)$. Dacă notăm $u_n = u(x_n)$, avem $u_n \to u_0$, deci $\varphi(u_n) \to \varphi(u_0)$, adică $\varphi(u(x_n)) \to \varphi(u(x_0))$ sau

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Deoarece şirul (x_n) a fost arbitrar, rezultă că:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

adică f este continuă în x_0. Punctul x_0 fiind de asemenea arbitrar în I, rezultă că f este continuă pe I.

Exemple:

1) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ este continuă pentru $x \geqslant 1$, fiind funcţia compusă a funcţiilor continue $\varphi(u) = \sqrt{u}$ şi $u(x) = x^3 - 1$.

2) $f(x) = \sin(3x^2 - 5)$ este continuă pe R, deoarece funcţiile $\varphi(u) = \sin u$ şi $u(x) = 3x^2 - 5$ sînt continue pe R.

3) $f(x) = e^{5x^3 - 2}$ este continuă pe R, deoarece $\varphi(u) = e^u$ şi $u(x) = 5x^3 - 2$ sînt continue pe R.

4) $f(x) = \sin(\sin x + \sqrt{x})$ este continuă pe $[0, \infty)$.

3. Continuitatea funcţiilor inverse

T e o r e m ă. Funcţia inversă a unei funcţii continue este o funcţie continuă.

Deoarece demonstraţia acestei teoreme depăşeşte cadrul manualului, dăm următoarea justificare geometrică: s-a arătat (v. cap. VI) că, dacă f şi φ sînt două funcţii inverse una alteia, graficele lor sînt simetrice faţă de prima bisectoare. Dacă f este continuă, graficul său nu se întrerupe în nici un punct. Urmează că nici graficul funcţiei φ, obţinut din cel al funcţiei f, prin simetrie faţă de prima bisectoare, nu se întrerupe în nici un punct şi, deci, şi funcţia φ este continuă.

Din această teoremă se deduce că *funcţia logaritmică şi funcţiile circulare inverse sînt continue pe tot domeniul lor de definiţie*, deoarece sînt inversele unor funcţii continue. Putem, deci, scrie:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$, dacă $x_0 > 0$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$, dacă $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$, dacă $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$;

4) $\lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$, oricare ar fi $x_0 \in R$;

5) $\lim_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0$, oricare ar fi $x_0 \in R$.

Observaţie. Din cele două teoreme precedente rezultă că orice funcţie elementară (v. cap. VI, § 3, obs. 2) este continuă pe domeniul ei de definiţie.

§ 3. FUNCŢII CONTINUE CARE AU VALORI DE SEMNE CONTRARE LA EXTREMITĂŢILE UNUI INTERVAL

Teoremă. **Dacă f este o funcţie continuă pe un interval $[a, b]$ şi dacă are valori de semne contrare la extremităţile intervalului, atunci funcţia f ia valoarea 0 cel puţin într-un punct cuprins între a şi b.**

Justificarea geometrică a acestei teoreme este următoarea.

Dacă, de exemplu, $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$, o extremitate a graficului funcţiei se află sub axa Ox şi cealaltă extremitate se află deasupra axei Ox (fig. 85). Deoarece graficul unei funcţii continue nu se întrerupe, el trebuie să traverseze axa Ox cel puţin într-un punct. În astfel de puncte, funcţia are valoarea 0.

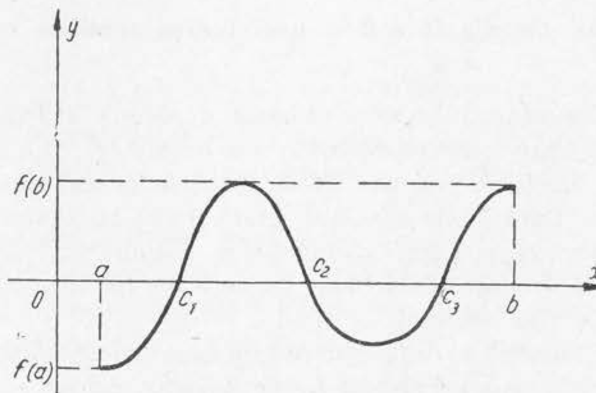


Fig. 85

În figura 85, graficul traversează axa Ox în trei puncte c_1, c_2, c_3. În aceste puncte avem $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$. Se atrage atenţia că această justificare geometrică nu constituie o demonstraţie.

Pentru a demonstra teorema să împărțim intervalul $[a, b]$ în două intervale de lungime egală (fig. 86), prin punctul $\frac{a+b}{2}$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$.

Dacă la mijlocul intervalului funcția se anulează, teorema este demonstrată. În caz contrar, notăm cu $[a_1, b_1]$ pe acela dintre cele două intervale la extremitățile căruia funcția are valori de semne contrare: $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

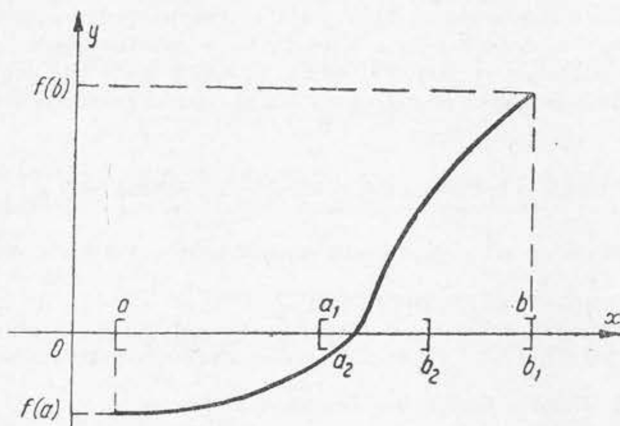


Fig. 86

Împărțim din nou intervalul $[a_1, b_1]$ în două părți egale, prin punctul de diviziune $\frac{a_1+b_1}{2}$. Dacă în acest punct funcția se anulează, teorema este demonstrată. În caz contrar, notăm cu $[a_2, b_2]$ pe acela dintre cele două intervale, la extremitățile căruia funcția are valori de semne contrare: $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Să observăm că, dacă notăm cu l lungimea intervalului $[a, b]$, $(l = b - a)$, atunci $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$ și $b_2 - a_2 = \frac{l}{2^2}$.

Procedînd astfel, fie că găsim, după un număr finit de operații de diviziune, un punct în care funcția f se anulează și, în acest caz, teorema este demonstrată, fie că nu găsim nici un astfel de punct. În al doilea caz, obținem un șir de intervale:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

la extremitățile cărora funcția are valori de semne contrare:

$$f(a_1) < 0,\ f(a_2) < 0, \ldots,\ f(a_n) < 0,\ \ldots$$
$$f(b_1) > 0,\ f(b_2) > 0, \ldots,\ f(b_n) > 0,\ \ldots$$

Șirul extremităților din stînga ale intervalelor este crescător, iar șirul extremităților din dreapta este descrescător:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \text{ și } b_n - a_n = \frac{l}{2^n}.$$

Șirul (a_n) este crescător și mărginit de b_1, deci (v. cap. III, § 2) are limită: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Atunci:

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n = \frac{l}{2^n} + a_n,$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{l}{2^n} + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + c = c.$$

Cele două șiruri (a_n) și (b_n) au aceeași limită, $c \in [a, b]$. Funcția f este continuă în c, deci, deoarece $a_n \to c$ și $b_n \to c$, deducem: $f(a_n) \to f(c)$ și $f(b_n) \to f(c)$. Dar, $f(a_n) < 0$, deci (v. cap. III. § 3) și limita este negativă: $f(c) \leqslant 0$; $f(b_n) > 0$, deci și limita este pozitivă: $f(c) \geqslant 0$. Din aceste două inegalități rezultă că $f(c) = 0$ și teorema este demonstrată.

Exemple:

1) Fie ecuația $\sin x = 0$. Funcția $f(x) = \sin x$ este continuă pe R și $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, iar $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ecuația are cel puțin o soluție cuprinsă între -1 și 1. (Se știe că ecuația are o singură soluție între -1 și 1, anume $x = 0$.)

2) Fie ecuația $x^5 + 3x^2 - 2 = 0$. Funcția $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2$ este continuă pe R, fiind un polinom. Avem $f(0) = -2$ și $f(1) = 2$, deci ecuația are cel puțin o rădăcină între 0 și 1.

Consecință. *Dacă o funcție nu se anulează pe un interval I, pe care este continuă, ea păstrează același semn pe intervalul I.*

Această consecință permite uneori să stabilim intervalele pe care o funcție continuă păstrează același semn.

Fie f o funcție *continuă* pe un interval I. Să presupunem că funcția se anulează *într-un număr finit* de puncte din I, pe care să le scriem *în ordine crescătoare:*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

În fiecare interval (x_i, x_{i+1}) funcția nu se mai anulează, deci păstrează același semn pe acest interval.

La stînga lui x_1 funcția nu se mai anulează, deci la stînga lui x_1 funcția păstrează același semn.

De asemenea, la dreapta lui x_n, funcția păstrează același semn.

Pentru a stabili, de exemplu, ce semn au *toate* valorile funcției în intervalul (x_i, x_{i+1}), este suficient să stabilim semnul valorii funcției într-un *singur* punct din (x_i, x_{i+1}).

Exemple:

1) Fie $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ definită pe R. Funcția se anulează în punctele $-\frac{1}{2}$ și 2. Intervalele pe care funcția păstrează același semn sînt: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $(2, \infty)$. Pentru a stabili semnul funcției, luăm valoarea sa în cîte un punct din fiecare interval. Astfel,

$f(-1) = -3$, deci în primul interval funcția este strict negativă; $f(0) = 2$, deci în al doilea interval funcția este strict pozitivă; $f(3) = -7$, deci în al treilea interval funcția este strict negativă.

Aceste rezultate le trecem într-un tablou:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-\ -$	0	$+\ +$	0	$-\ -$	

Am găsit astfel un rezultat pe care-l putem obține și cu regula semnului trinomului.

2) Fie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$ definită pe $R - \{0, -1\}$.

Punctele în care se anulează numărătorul sînt 1 și 2, iar cele în care se anulează numitorul sînt -1 și 0. Semnul funcției se obține studiind semnul numărătorului și al numitorului. Formăm următorul tablou:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-\ -$	0	$+\ +$	
$x^2 + x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+\ +\ +$		$+\ +$	
$f(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	0	$-\ -$	0	$+$	

Pentru stabilirea semnului numărătorului, se pot considera valorile funcției $x^2 - 3x + 2$ în punctele $0, \frac{3}{2}, 3$, iar pentru stabilirea semnului numitorului, se pot considera valorile funcției $x^2 + x$ în punctele $-2, -\frac{1}{2}, 1$.

Să observăm că funcția $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$ are același semn în punctele în care este definită ca și funcția $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)$, care se anulează în punctele $-1, 0, 1, 2$. Putem forma, deci, dintr-o dată următorul tablou:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		∞
$f(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCIȚII

Aplicînd direct definiția continuității într-un punct și pe un interval, să se arate că următoarele funcții sînt continue (precizînd și intervalele în care sînt continue).

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - \sin x}{x + 1}$.　　**2.** $f(x) = \dfrac{xe^x - 3e^{-x}}{2x - 9}$.

3. $f(x) = 2x^2 - 7x + \sqrt[5]{x^{-3}} + 1$.　　**4.** $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 9)^{-5}} + 2\,\mathrm{tg}\, x$.

Să se studieze continuitatea funcțiilor următoare:

5. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ x+2, \text{ pentru } 2 < x < 5. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ pentru } x \neq 0; \\ 0, \quad \text{ pentru } x = 0. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 3x, \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1. \\ 2x - 1, \text{ pentru } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, \text{ pentru } -2 \leqslant x < 2; \\ 1, \text{ pentru } x = 2 \\ 5x - 1, \text{ pentru } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2}, \text{ pentru } x \neq -1; \\ 5, \text{ pentru } x = -1. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, \text{ pentru } x \neq 1; \\ \alpha, \text{ pentru } x = 1. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ pentru } x \neq 2; \\ \alpha \text{ (finit) pentru } x = 2. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} e^x, \quad \text{ pentru } x < 0; \\ \alpha + x, \text{ pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \text{ rațional}; \\ 0, \text{ pentru } x \text{ irațional}. \end{cases}$

Aplicînd rezultatele din § 3, să se studieze semnul următoarelor funcții:

14. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

15. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

16. $f(x) = \dfrac{(2-x)(x+1)^2}{x(x+3)}$.

17. $f(x) = \sin x - \cos x$ definită pe $[0, 2\pi]$.

18. $f(x) = 4\sin^2 x - 1$, definită pe $[0, 2\pi]$.

19. $f(x) = 2e^x - 5$.

20. $f(x) = 1 + 2\ln x$.

21. $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 2$.

CAPITOLUL IX

DERIVATE

§ 1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOŢIUNEA DE DERIVATĂ

1. Viteza unui mobil în mişcare rectilinie

Să considerăm un mobil M care se mişcă *rectiliniu şi uniform*. Aceasta înseamnă că traiectoria sa este o dreaptă şi că el parcurge spaţii egale în intervale de timp egale (spaţiul este proporţional cu timpul în care a fost parcurs).

Viteza v a mobilului se poate obţine măsurînd spaţiul s parcurs într-un număr t de unităţi de timp şi formînd raportul $v = \frac{s}{t}\cdot$ În fiecare moment, mobilul are aceeaşi viteză, v.

Să presupunem acum că mobilul M se mişcă *rectiliniu* în acelaşi sens şi *neuniform* — adică în intervale de timp egale parcurge spaţii neegale (spaţiul nu este proporţional cu timpul în care a fost parcurs). Alegînd ca unitate de timp, de exemplu, secunda, într-o secundă mobilul parcurge spaţiul s', în altă secundă spaţiul s'' ş.a.m.d. Nu mai putem afirma că viteza este spaţiul parcurs în unitatea de timp, deoarece, în general, s' şi s'' sînt diferite. Ce se înţelege în acest caz prin *viteza mobilului la un anumit moment?*

Pentru a lămuri mai bine modul în care se pune această problemă, să alegem un exemplu simplu : căderea corpului în vid. Din fizică se ştie că distanţa $s(t)$ (măsurată în metri) parcursă de mobilul M în primele t secunde este dată de egalitatea $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$, unde $g \approx 9{,}81$ m/s^2. Astfel, după $t_1 = 1$ secundă mobilul parcurge distanţa $s(1) = \frac{1}{2} g$ metri, după $t_2 = 2$ secunde parcurge distanţa $s(2) = 2g$ metri etc. În a doua secundă, mobilul

a parcurs distanţa $s(2) - s(1) = \frac{3}{2} g$ metri, *diferită* de distanţa $\frac{1}{2} g$ metri parcursă în prima secundă.

Distanţa parcursă între două momente t_0 şi t_1 este $s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t_0^2$. Diferenţa $t_1 - t_0$ se numeşte, în mod obişnuit, *creşterea timpului* de la t_0 la t_1; iar distanţa $s(t_1) - s(t_0)$ se numeşte *creşterea spaţiului*, corespunzătoare creşterii timpului $t_1 - t_0$.

Dacă facem raportul dintre creşterea spaţiului, $s(t_1) - s(t_0)$, şi creşterea timpului, $t_1 - t_0$, obţinem:

$$v_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2} g \frac{t_1^2 - t_0^2}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2} g (t_1 + t_0).$$

Numărul obţinut îl putem considera ca o *viteză medie* a mobilului în intervalul de timp dintre t_0 şi t_1, în sensul că, dacă un alt mobil s-ar mişca rectiliniu şi *uniform* cu viteza v_1, el ar parcurge în intervalul de timp dintre t_0 şi t_1 aceeaşi distanţă ca şi mobilul iniţial. Într-adevăr:

$$v_1 (t_1 - t_0) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} (t_1 - t_0) = s(t_1) - s(t_0).$$

În intervalul de timp dintre t_0 şi alt moment, t_2, viteza medie este:

$$v_2 = \frac{s(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0} = \frac{1}{2} g (t_2 + t_0).$$

În general, viteza medie în intervalul de timp dintre t_0 şi un moment oarecare t este

$$v(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2} g (t + t_0).$$

Pentru ca această viteză medie să exprime cu o aproximaţie cît mai bună ceea ce noi înţelegem intuitiv prin viteza pe care o are mobilul în momentul t_0, trebuie să luăm intervalele de timp din ce în ce mai mici, adică trebuie ca t să fie din ce în ce mai apropiat de t_0. Sîntem astfel conduşi să calculăm limita acestei viteze medii cînd creşterea timpului, $t - t_0$, tinde către zero sau, ceea ce este acelaşi lucru, cînd t tinde către t_0. Obţinem astfel:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2} g (t + t_0) = g t_0.$$

Această limită se ia, *prin definiție*, ca viteza $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0:

$$v(t_0) = gt_0.$$

2. Tangenta la o curbă

Să considerăm o funcție definită pe un interval I și graficul său (C) (fig. 87). Să luăm două puncte $M_0(x_0, f(x_0))$ și $M(x, f(x))$ pe (C), și să le unim printr-o dreaptă. Obținem secanta M_0M care formează cu axa Ox un unghi α. Paralela prin M la Oy întîlnește paralela prin M_0 la Ox în punctul N. S-a format triunghiul dreptunghic M_0NM, care are catetele $NM_0 = x - x_0$ și $MN = f(x) - f(x_0)$. Unghiul α este dat de egalitatea:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă luăm alt punct $M'(x', f(x'))$, secanta M_0M' formează cu axa Ox unghiul α' dat de egalitatea

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

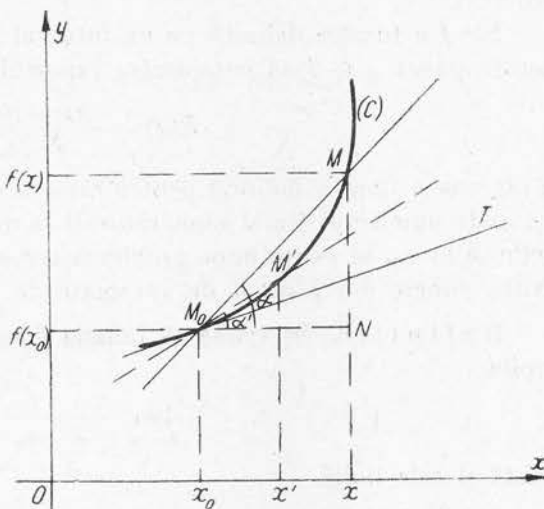


Fig. 87

Se vede că, pentru valori ale lui x diferite, obținem unghiuri α diferite. Unghiul α este, deci, funcție (depinde) de x. Ce se întîmplă dacă luăm pe x din ce în ce mai apropiat de x_0? Unghiul α se apropie și el din ce în ce mai mult de o valoare α_0? Sau, cu alte cuvinte, secanta M_0TM se apropie, ca poziție, din ce în ce mai mult de o poziție limită M_0T (fig. 87)? Sîntem, deci, conduși și în acest caz să considerăm limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

În cazul cînd această limită există, ea este coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \alpha$ al unei drepte M_0T, care este, *prin definiție*, tangenta la curba (C) în punctul M_0.

§ 2. DERIVATA

1. Definiția derivatei

Cele două exemple de mai sus, unul din fizică, altul din geometrie, ca de altfel și alte exemple, conduc la studiul limitei raportului $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ în punctul x_0. Dată fiind importanța limitei acestui raport, în analiza matematică ea este studiată, în general, independent de problema din care a provenit.

Fie f o funcție definită pe un interval I și x_0 un punct din I. Pentru fiecare punct $x \in I$ să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$R(x)$ este o funcție definită pentru orice x din intervalul I, cu excepția lui x_0, unde numitorul (ca și numărătorul) se anulează. Deși funcția R nu este definită în x_0, se poate pune problema cercetării limitei sale în x_0, deoarece există puncte din I oricît de apropiate de x_0.

Definiție. Se spune că funcția f este derivabilă în punctul x_0, dacă limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

există și este finită.

Limita însăși se numește derivata funcției f în punctul x_0 și se notează $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se obișnuiește de asemenea să se noteze derivata $f'(x_0)$ cu $D(x_0)$ sau $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Diferența $x - x_0$ se numește adesea *creșterea argumentului de la x_0 la x*, iar diferența $f(x) - f(x_0)$ se numește atunci *creșterea funcției*, corespunzătoare creșterii $x - x_0$ a argumentului. Funcția $R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ este, așadar, raportul dintre creșterea funcției și creșterea argumentului. Se poate, deci, spune că:

Derivata $f'(x_0)$ este limita raportului $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dintre creșterea funcției și creșterea argumentului, cînd creșterea argumentului tinde către 0.

Să considerăm graficul funcţiei f (fig. 87) şi să presupunem că f este derivabilă în x_0. Din consideraţiile de la nr. 2 din paragraful precedent rezultă că derivata $f'(x_0)$, dacă există, este coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg} \alpha$ al tangentei la grafic în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Aşadar, interpretarea geometrică a derivatei este următoarea:

Dacă există derivata $f'(x_0)$, atunci graficul are tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$, iar $f'(x_0)$ este coeficientul unghiular al acestei tangente.

Exemplu: Fie funcţia $f(x) = x^2$ definită pe R. Graficul său este o parabolă (fig. 88). Să cercetăm dacă această funcţie este derivabilă în punctul $\frac{1}{2}$. Pentru aceasta să formăm raportul $R(x)$: $\dfrac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}$.

Acest raport are limită finită în punctul $\frac{1}{2}$, deci f este derivabilă în $\frac{1}{2}$ şi $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Graficul funcţiei are tangentă în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ şi coeficientul său unghiular este 1, deci unghiul format de tangentă cu axa Ox este $\frac{\pi}{4}$.

D e f i n i ţ i e. Se spune că o funcţie f este derivabilă pe un interval I dacă este derivabilă în orice punct din I.

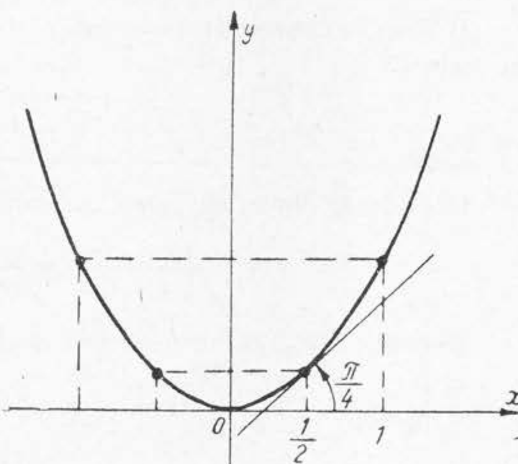


Fig. 88

Evident, pentru ca f să fie derivabilă pe I este necesar, în primul rînd, ca I să fie conţinut în domeniul de definiţie al lui f.

Dacă f este derivabilă pe tot domeniul său de definiţie, se spune, mai simplu, că f este derivabilă (fără altă specificaţie).

Dacă fiecărui punct $x \in I$ facem să-i corespundă numărul $f'(x)$, se obţine o funcţie definită pe I, care se notează f' $\left(\text{sau } Df, \text{ sau } \frac{df}{dx}\right)$ şi care se numeşte *funcţia derivată* a funcţiei f (sau, mai simplu, *derivata* lui f).

Trebuie să se facă deosebire între *derivata funcției f în punctul* x_0, care este *un număr*, $f'(x_0)$, și *derivata funcției f*, care este o *funcție*, f'. Derivata funcției f în punctul x_0, $f'(x_0)$, este valoarea funcției f' în punctul x_0; se scrie uneori :

$$f'(x_0) = (f'(x))_{x=x_0}.$$

Să aplicăm definiția derivatei pentru calculul derivatelor unor funcții elementare.

1) *Funcția constantă* $f(x) \equiv c$ *este derivabilă și derivata sa este* $f'(x) \equiv 0$. Se scrie :

$$\boxed{c' = 0}$$

Într-adevăr, să luăm un punct *oarecare* x_0 și să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} \equiv 0.$$

Rezultă $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, deducem că derivata funcției constante este 0, în orice punct $x \in R$, adică $f'(x) \equiv 0$.

Astfel, dacă $f(x) \equiv 5$, avem $f'(x) \equiv 0$, sau $5' = 0$; dacă $f(x) \equiv -3$, avem $(-3)' = 0$ etc.

2) *Funcția identică* $f(x) = x$ *este derivabilă și derivata sa este* $f'(x) \equiv 1$. Se scrie :

$$\boxed{x' = 1}$$

Într-adevăr, fie x_0 un punct oarecare. Raportul $R(x)$ este în acest caz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1.$$

Rezultă : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$. Prin urmare $f'(x) \equiv 1$, oricare ar fi $x \in R$.

Astfel, $(x)'_{x=1} = 1$, $(x)'_{x=0} = 1$ etc.

3) *Funcția* $f(x) = \sin x$ *este derivabilă și derivata sa este* $f'(x) = \cos x$. Se scrie :

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Fie x_0 un punct oarecare. Raportul $R(x)$ este:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, obţinem:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=$$

$$=1\cdot\cos\frac{x_0+x_0}{2}=\cos x_0.$$

Deoarece x_0 este arbitrar, rezultă că $f'(x)=\cos x$, oricare ar fi x.

Astfel: $f'(0)=(\sin x)'_{x=0}=\cos 0=1$; $(\sin x)'_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0$ etc.

4) *Funcţia* $f(x)=\cos x$ *este derivabilă şi derivata sa este* $f'(x)=-\sin x$. Se scrie:

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

Fie x_0 un punct oarecare. Raportul $R(x)$ este:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\frac{-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=-\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\sin\frac{x+x_0}{2}.$$

Avem:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\sin\frac{x+x_0}{2}=$$

$$=-1\cdot\sin x_0=-\sin x_0.$$

Deoarece x_0 este arbitrar, rezultă că $f'(x)=-\sin x$, oricare ar fi x.

Astfel: $f'(0)=(\cos x)'_{x=0}=-\sin 0=0$; $(\cos x)'_{x=\frac{\pi}{2}}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ etc.

Observații. 1° Este posibil ca raportul $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ să nu aibă limită în x_0 (deci f să nu fie derivabilă în x_0), dar să aibă limită la stînga, care se notează $f'_s(x_0)$, și limită la dreapta, care se notează $f'_d(x_0)$, ambele finite:

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}; \quad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se spune atunci că $f'_s(x_0)$ este *derivata la stînga* a funcției f în x_0 și că $f'_d(x_0)$ este *derivata la dreapta* a funcției f în x_0. În acest caz există o semidreaptă tangentă la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$, cu coeficientul unghiular $f'_s(x_0)$ — numită *semitangentă la stînga* — și o semidreaptă tangentă la grafic în $(x_0, f(x_0))$ cu coeficientul unghiular $f'_d(x_0)$ — numită *semitangentă la dreapta*. Asemenea puncte $(x_0, f(x_0))$ se numesc *puncte unghiulare* ale graficului (fig. 89).

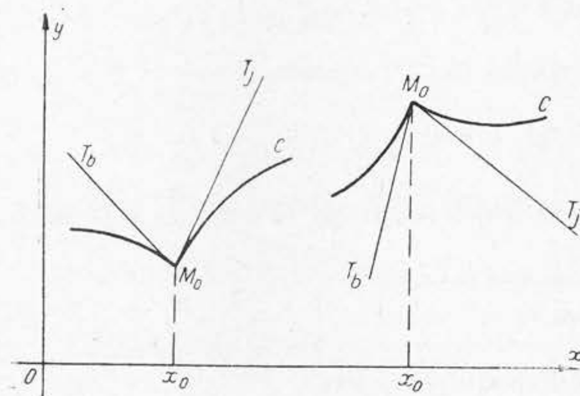


Fig. 89

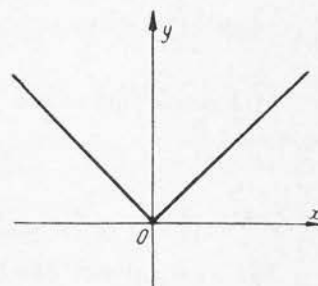


Fig. 90

De exemplu, funcția $f(x) = |x|$ definită pe R nu este derivabilă în punctul 0, dar are derivate laterale, $f'_s(0) = -1$, și $f'_d(0) = 1$.

Într-adevăr:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Acest raport are în 0 limită la stînga, egală cu -1, și limită la dreapta, egală cu 1. În figura 90 se observă că în punctul (0, 0) graficul nu are tangentă, dar are semitangentă la stînga, cu coeficientul unghiular -1, și semitangentă la dreapta, cu coeficientul unghiular 1.

2° Este posibil ca raportul $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ să aibă în x_0 limite laterale infinite (egale sau diferite). În acest caz, graficul funcției are în punctul $(x_0, f(x_0))$ semitangente laterale

paralele cu axa Oy. Dacă limitele laterale sînt diferite, cele două semitangente sînt suprapuse, iar $(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de întoarcere* al graficului (fig. 91).

Fie, de exemplu, funcţia $f(x) = \sqrt{|x|}$ definită pe R; să formăm raportul $R(x)$ corespunzător punctului 0:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{dacă } x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = -\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

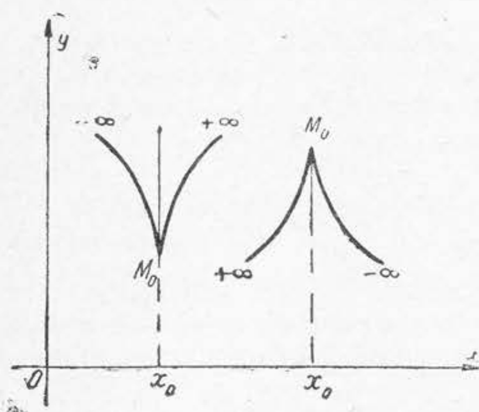


Fig. 91

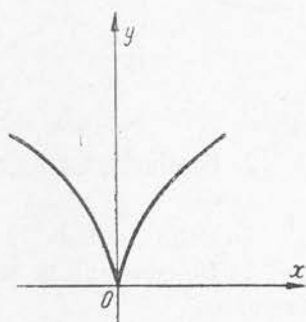


Fig. 92

Acest raport are în 0 limită la stînga egală cu $-\infty$ şi limită la dreapta egală cu ∞ (fig. 92).

Dacă limitele laterale sînt ambele $-\infty$ sau ambele ∞, atunci limita în x_0 a raportului $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este egală, respectiv, cu $-\infty$ sau cu ∞. În acest caz funcţia *nu este derivabilă*, totuşi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se notează tot cu $f'(x_0)$ şi se numeşte încă *derivata funcţiei* f în x_0.

Cele două semitangente laterale sînt în prelungire, deci graficul are în punctul $(x_0, f(x_0))$ tangentă paralelă cu axa Oy (fig. 93). În acest caz, tangenta traversează graficul, iar $(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune* al graficului.

Fie, de exemplu, funcţia definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{|x|}, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

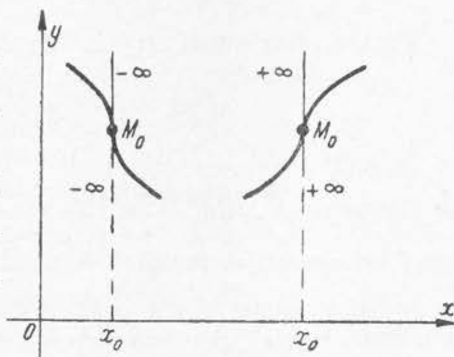


Fig. 93

Să formăm raportul $R(x)$ corespunzător punctului 0:

$$\text{dacă } x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}};$$

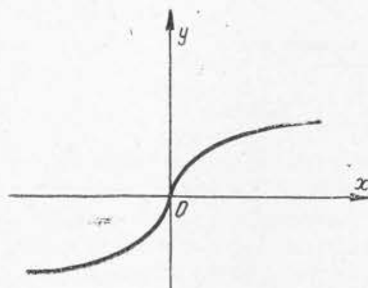


Fig. 94

$$\text{dacă } x < 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\sqrt{|x|}}{x} =$$

$$= \frac{-\sqrt{|x|}}{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Deci, oricare ar fi $x \neq 0$, avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Rezultă că limita în 0 a raportului este ∞ (fig. 94), deci

$$f'(0) = \infty.$$

2. Continuitatea funcțiilor derivabile

În definiția derivatei unei funcții f într-un punct x_0, nu s-a pus condiția ca f să fie continuă în acest punct. Continuitatea lui f rezultă, însă, din următoarea

T e o r e m ă. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Fie f o funcție definită pe un interval I, derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, și fie $f'(x_0)$ derivata sa în acest punct:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru orice punct $x \neq x_0$ din I putem scrie egalitatea

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

deci f este continuă în x_0.

Observație. Nu trebuie să se creadă că și reciproc, orice funcție continuă este derivabilă. De exemplu, funcția $f(x) = |x|$ este continuă în 0, dar nu este derivabilă în 0.

În mulțimea tuturor funcțiilor continue, submulțimea funcțiilor derivabile este foarte săracă.

§ 3. OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

În acest paragraf se va arăta că, dacă se aplică funcțiilor derivabile operațiile obișnuite, se obțin tot funcții derivabile.

1. Operații algebrice

T e o r e m a 1. Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un interval I, atunci și suma lor $f + g$ este o funcție derivabilă pe I și

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Să luăm un punct *oarecare* $x_0 \in I$ și să formăm raportul $R(x)$ pentru funcția $h = f + g$.

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece termenii sumei din ultimul membru au în punctul x_0 limitele, respectiv, $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$, rezultă că și primul membru are limită în punctul x_0, deci funcția $h = f + g$ este derivabilă în x_0 și :

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dar punctul x_0 a fost ales arbitrar în I; rezultă deci că funcția h este derivabilă în orice punct $x \in I$ și $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ sau $h' = f' + g'$, adică

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Teorema aceasta se enunță simplificat astfel :

Derivata sumei este egală cu suma derivatelor

Din aproape în aproape se deduce că *suma* $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ *a* n (n număr finit) *funcții derivabile este de asemenea o funcție derivabilă și*

$$\boxed{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'}$$

Se demonstrează la fel că *diferența a două funcții derivabile f și g este o funcție derivabilă* și

$$\boxed{(f-g)' = f' - g'}$$

Exemple:

1) $f(x) = \sin x = \cos x$, $f'(x) = \cos x - \sin x$; în particular:

$$f'(0) = 1;\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ etc.}$$

2) $f(x) = \cos x + 2x - 3$, $f'(x) = -\sin x + 2$; în particular:

$$f'(\pi) = 2;\ f'(2\pi) = 2;\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ etc.}$$

Teorema 2. Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un interval I, atunci produsul lor fg este o funcție derivabilă pe I și:

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

Să luăm un punct oarecare $x_0 \in I$ și să formăm raportul $R(x)$ pentru funcția $h = fg$:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

S-a scăzut și s-a adunat la numărător $f(x_0), g(x)$.) Funcția g fiind derivabilă în x_0 este continuă în x_0, deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. De asemenea, f și g fiind — prin ipoteză — derivabile în x_0, avem:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),\quad \lim_{x \to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0).$$

Rezultă că raportul considerat are limită în x_0, adică funcția $h = fg$ este derivabilă în x_0 și

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0)\lim_{x \to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Deoarece x_0 a fost ales arbitrar în I, rezultă că h este derivabilă în orice punct x din I și $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, sau $h' = f'g + fg'$, adică:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Teorema 2 se enunță simplificat astfel :

Derivata produsului a două funcții este egală cu derivata primei funcții înmulțită cu cealaltă funcție, plus prima funcție înmulțită cu derivata celeilalte.

Din aproape în aproape se deduce că *produsul* $f_1 f_2 \dots f_n$ *a* n *funcții derivabile este de asemenea o funcție derivabilă și:*

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n' = \\ = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \dots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \dots f_n$$

De exemplu, în cazul a trei funcții, f_1, f_2, f_3, formula se demonstrează astfel, folosind formula de derivare a produsului a două funcții

$$(f_1 f_2 f_3)' = (f_1 f_2)' f_3 + (f_1 f_2) f_3' = [f_1' f_2 + f_1 f_2'] f_3 + f_1 f_2 f_3' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'.$$

În particular, pentru produsul a n funcții egale cu f, termenii sumei, în număr de n, sînt egali între ei și egali cu $nf^{n-1} f'$, deci

$$(f^n)' = nf^{n-1} f'$$

Această formulă va rezulta, mai departe, și din teorema de derivare a funcțiilor compuse.

T e o r e m a 3. Dacă f **este o funcție derivabilă pe un interval** I, **atunci funcția** cf **este derivabilă pe** I, **oricare ar fi numărul** c, **și**

$$(cf)' = cf'$$

Într-adevăr considerînd funcția constantă $g(x) \equiv c$, rezultă $g' = 0$ și $fg = c\, f$ deci $(cf)' = (fg)' = f'g + fg' = f'c + f \cdot 0 = cf'$.

În particular, luînd $c = -1$, se obține :

$$(-f)' = -f'$$

Exemple :

1) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. Se scrie :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

2) $f(x) = ax^n$, $f'(x) = nax^{n-1}$.

3) *Orice polinom* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *este o funcție derivabilă și derivata sa este:*

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1.$$

4) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $f'(x) = 6x + 4$.

5) $f(x) = x \sin x$, $f'(x) = \sin x + x \cos x$.

6) $f(x) = x \sin x \cos x$, $f'(x) = \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x =$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x.$$

7) $f(x) = (x^2 - 1)^{200}$, $f'(x) = 200(x^2 - 1)^{199} . (x^2 - 1)' = 400x(x^2 - 1)^{199}$.

8) $f(x) = \sin^5 x$, $f'(x) = 5 \sin^4 x \cos x$, în particular

$$f'(0) = 0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Teorema 4. Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un interval I, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în toate punctele în care este definită (în care numitorul nu se anulează) și

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Fie x_0 un punct oarecare în care funcția $h = \frac{f}{g}$ este definită, deci în care numitorul nu se anulează, $g(x_0) \neq 0$. Să formăm raportul $R(x)$ pentru această funcție:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x)}{g(x)\, g(x_0)\, (x - x_0)} =$$

$$= \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{g(x)\, g(x_0)\, (x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right].$$

(S-a scăzut și s-a adunat la numărător $f(x_0)\, g(x_0)$.)

Funcția g este derivabilă în x_0, deci este continuă în x_0, și, prin urmare, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$; termenii din paranteză au limită în x_0.

Rezultă că și raportul inițial are limită în x_0, adică funcția h este derivabilă în x_0 și derivata sa este

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\, g(x_0)} \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \frac{1}{[g(x_0)]^2} [f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)] = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Deoarece x_0 a fost ales arbitrar în I, astfel ca $g(x_0) \neq 0$, rezultă că funcția h este derivabilă în orice punct x în care este definită (în care numitorul nu se anulează) și

$$h'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ sau } h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ adică } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple:

1) *Orice funcție rațională,* $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$, *este o funcție derivabilă în toate punctele în care este definită* (în care numitorul nu se anulează) ca fiind un raport de funcții derivabile.

Pentru $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

avem:

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)'(x-1) - (x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

În particular: $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -3$, $f'(2) = -3$.

2) *Funcția* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție,* $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \text{ întreg}\right)$, și $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Se scrie:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Într-adevăr, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ și pentru $\cos x \neq 0$ se aplică regula de derivare a cîtului:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

În particular: $f'(0) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

3) *Funcția* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție*, $(x \neq k\pi$, k întreg), și $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$. Se scrie:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Într-adevăr, pentru $\sin x \neq 0$, avem $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, deci

$$f'(x) = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

În particular:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

4) $f(x) = x^{-n}$ *este derivabilă pentru* $x \neq 0$, și $f'(x) = -nx^{-n-1}$. Se scrie:

$$\boxed{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}}$$

Într-adevăr, $f(x) = \frac{1}{x^n}$ și deci, $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$,

$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$; în particular $f'(-1) = -1$, $f'(1) = -1$.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$,

$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$; $f'(-1) = 2$, $f'(1) = -2$.

c) $f(x) = \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - 3x^2 + 2$,

$$f'(x) = -\frac{28}{x^5} + \frac{4}{x^3} - \frac{15}{x^4} - 6x.$$

Așadar, oricare ar fi k *întreg*, avem $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$.

Se va arăta mai departe că, oricare ar fi α real, avem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. Derivata funcțiilor compuse

La numărul precedent s-a arătat că, aplicînd funcțiilor derivabile operațiile algebrice, se obțin tot funcții derivabile. În acest număr se va arăta că, dacă se aplică funcțiilor derivabile operația de compunere, se obțin de asemenea funcții derivabile.

T e o r e m ă. **Dacă funcțiile $\varphi(u)$ și $u(x)$ sînt derivabile, atunci și funcția compusă $f(x) = \varphi(u(x))$ este derivabilă și**

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Fie x_0 un punct oarecare în care funcția $f(x)$ este definită (deci în care și $u(x)$ este definită); să notăm $u_0 = u(x_0)$. Funcția $\varphi(u)$ este derivabilă în u_0, deci

$$\varphi'(u_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0}.$$

Putem atunci scrie, pentru $u \neq u_0$,

$$\varphi'(u_0) = \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0} + \alpha(u), \quad \text{unde} \quad \lim_{u \to u_0} \alpha(u) = \alpha(u_0) = 0.^{*}$$

Deci:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = [\varphi'(u_0) - \alpha(u)]\,(u - u_0).$$

Rezultă:

$$\varphi(u(x)) - \varphi(u_0) = [\varphi'(u_0) - \alpha(u(x))]\,(u(x) - u_0).$$

Să formăm acum raportul $R(x)$ pentru funcția $f(x) = \varphi(u(x))$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(u(x)) - \varphi(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{\varphi(u(x)) - \varphi(u_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[\varphi'(u_0) - \alpha(u(x))]\,(u(x) - u_0)}{x - x_0} = [\varphi'(u_0) - \alpha(u(x))]\,\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Toți termenii din ultimul membru au limită în punctul x_0, deoarece $\varphi'(u_0)$ este constant, $\lim_{x \to x_0} \alpha(u(x)) = \alpha(u(x_0)) = \alpha(u_0) = 0$* și $\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$. Rezultă că și raportul

---

* Funcția $\alpha(u)$ este definită astfel:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \varphi'(u_0) - \dfrac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0}, & \text{dacă } u \neq u_0 \\ 0, & \text{dacă } u = u_0. \end{cases}$$

* Funcția $\alpha(u)$ este continuă în u_0 și funcția $u(x)$ este continuă în x_0, deci și funcția compusă $\alpha(u(x))$ este continuă în x_0.

inițial are limită în x_0, adică f este derivabilă în x_0 și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [\varphi'(u_0) - \alpha(u(x))] \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= [\varphi'(u_0) - \lim_{x \to x_0} \alpha(u(x))] \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(u_0) \cdot u'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că funcția $f(x) = \varphi(u(x))$ este derivabilă în orice punct x în care este definită și :

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Observații. 1° Dacă în egalitatea $f(x) = \varphi(u(x))$ nu se mai pune în evidență argumentul x, se scrie $f = \varphi(u)$ și deci $f' = [\varphi(u)]'$. De asemenea, dacă în egalitatea $f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$ nu se mai pune în evidență argumentul x, se scrie $f' = \varphi'(u) \cdot u'$, deci :

$$[\varphi(u)]' = \varphi'(u) \cdot u'$$

Se atrage atenția că în această egalitate u nu este variabilă independentă ci o funcție de x.

2° Teorema precedentă este valabilă și în cazul mai multor funcții care se compun. De exemplu, dacă funcțiile $\varphi(u)$, $u(v)$ și $v(x)$ sînt derivabile, atunci și funcția compusă $f(x) = \varphi(u(v(x)))$ este derivabilă și :

$$f' = \varphi'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x)$$

Practic, *derivata unei funcții compuse se obține înmulțind derivatele funcțiilor care se compun, în ordinea compunerii lor.*

3° În aplicații intervin funcții $f(x)$, cărora nu le putem calcula derivata cu regulile de la nr. 1; dacă însă putem descompune aceste funcții în alte funcții cărora le cunoaștem derivatele, atunci se aplică regula de derivare a funcțiilor compuse.

De exemplu, funcția $f(x) = \sin 2x$ se poate scrie $f(x) = \sin u(x)$, unde $u(x) = 2x$, deci

$$f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x.$$

Pentru funcția $f(x) = \cos^3(5x + 2) = [\cos(5x + 2)]^3$, avem $f'(x) =$

$$= 3[\cos(5x + 2)]^2 \cdot [\cos(5x + 2)]' = -3[\cos(5x + 2)]^2 \sin(5x + 2) \cdot (5x + 2)' =$$

$$= -15[\cos(5x + 2)]^2 \sin(5x + 2).$$

Ținînd seama de regulile de derivare pentru puteri întregi și pentru funcțiile trigonometrice, precum și de regula de derivare a funcțiilor compuse, se obțin formulele următoare (unde s-a notat cu u o funcție derivabilă).

1) $$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$ (n întreg).

În particular

$$(u^{-n})' = -nu^{-n-1}\cdot u', \text{ sau } \left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}} \text{ (} n \text{ natural).}$$

2)	$(\sin u)' = u' \cos u$	3)	$(\cos u') = -u' \sin u$
4)	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	5)	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Exemple:

1) $f(x) = (x + 2)^3$; $f'(x) = 3\,(x + 2)^2\,(x + 2)' = 3\,(x + 2)^2$.

2) $f(x) = (2x^2 + 1)^5$; $f'(x) = 5\,(2x^2 + 1)^4\,(2x^2 + 1)' = 5\,(2x^2 + 1)^4 \cdot 4x$;

$f'(0) = 0$, $f'(1) = 1\,620$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^5} = (x^2 + x + 1)^{-5}$;

$f'(x) = -5\,(x^2 + x + 1)^{-6}\,(x^2 + x + 1)' = \dfrac{-5\,(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6}$.

4) $f(x) = \sin(2x + 5)$; $f'(x) = [\cos(2x + 5)]\,(2x + 5)' =$

$= [\cos(2x + 5)] \cdot 2 = 2\cos(2x + 5)$; $f'\left(\dfrac{-5}{2}\right) = 2$.

5) $f(x) = \cos(3x^2 + 2x + 1)$; $f'(x) = [-\sin(3x^2 + 2x + 1)]\,(3x^2 + 2x + 1)' =$

$= -(6x + 2)\sin(3x^2 + 2x + 1)$; $f'(0) = -2\sin 1$.

6) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}$

7) $f(x) = \sin^3 x$; $f'(x) = 3\sin^2 x\,(\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$.

8) $f(x) = \cos^4(x^2 + 1)$; $f'(x) = 4\cos^3(x^2 + 1)\,[\cos(x^2 + 1)]' =$

$= 4\cos^3(x^2 + 1)\,[-\sin(x^2 + 1)\,(x^2 + 1)'] =$

$= -4\cos^3(x^2 + 1)\sin(x^2 + 1)\cdot 2x = -8x\cos^3(x^2 + 1)\sin(x^2 + 1)$.

§ 4. DERIVATA FUNCȚIILOR INVERSE

S-a arătat în paragraful precedent că operațiile algebrice și operația de compunere, aplicate funcțiilor derivabile, conduc tot la funcții derivabile. În acest paragraf se va arăta că, în anumite condiții, prin inversarea unei funcții derivabile se obține de asemenea o funcție derivabilă.

Teoremă. **Fie f o funcție strict monotonă și φ funcția sa inversă. Dacă f este derivabilă într-un punct x_0 și dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă φ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0)$ și:**

$$\boxed{\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Ipoteza afirmă că:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0,$$

deci, conform definiției limitei unei funcții într-un punct (v. cap. VII), dacă $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$) atunci:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \neq 0.$$

În consecință (v. cap. III):

$$\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Să observăm că, deoarece $y_0 = f(x_0)$, avem $x_0 = \varphi(y_0)$ și că $y_n = f(x_n)$ dacă, și numai dacă, $x_n = \varphi(y_n)$.

Trebuie să arătăm că derivata funcției φ în punctul y_0 este $\frac{1}{f'(x_0)}$ adică:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că, oricare ar fi șirul $y_n \to y_0 (y_n \neq y_0)$, avem:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dar:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}.$$

Funcția inversă φ fiind continuă * în y_0, avem $\varphi(y_n) \to \varphi(y_0)$, adică $x_n \to x_0$; deci, după cum s-a observat mai înainte,

$$\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)},$$

adică:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

* f este derivabilă în x_0, deci este continuă în x_0, și deci funcția inversă φ este continuă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0)$ (v. cap. VIII).

şi deci:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Justificarea geometrică a acestei teoreme este următoarea:

Graficele funcţiilor f şi φ sînt simetrice faţă de prima bisectoare (v. cap. VI) (fig. 95). Deoarece funcţia f este derivabilă în punctul x_0, graficul său admite în punctul (x_0, y_0) tangentă, M_0T, neparalelă cu axa Ox (deoarece $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \neq 0$); urmează că şi graficul funcţiei inverse φ admite în punctul corespunzător (y_0, x_0) tangentă, M'_0T', neparalelă cu axa Oy, deci φ este derivabilă în punctul y_0.

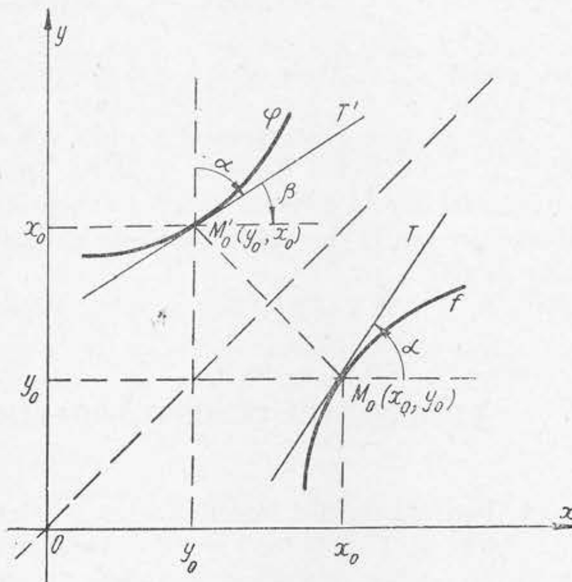


Fig. 95

Deoarece $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, avem $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$; dar $\operatorname{tg} \beta$ şi $\operatorname{tg} \alpha$ sînt respectiv coeficienţii unghiulari $\varphi'(y_0)$ şi $f'(x_0)$ ai celor două tangente, deci $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

C o n s e c i n ţ ă. Dacă f este o funcţie strict monotonă şi derivabilă, cu $f'(x) \neq 0$ pentru orice x în care este definită, atunci funcţia sa inversă φ este derivabilă şi:

$$\boxed{\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$ unde $x = \varphi(y)$, (respectiv $y = f(x)$),

sau

$$\varphi'(y) \cdot f'(x) = 1.$$

Acest rezultat se enunţă simplificat astfel:

Produsul derivatelor a două funcţii inverse este egal cu 1

Exemple: 1° Funcţiile $f(x) = \frac{x}{2}$ şi $\varphi(y) = 2y$ sînt inverse una alteia. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{2}, \quad \varphi'(y) = 2.$$

Se verifică deci egalitatea $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

2° Funcțiile $f(x) = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ și $\varphi(y) = \frac{1}{y}$, $(y \neq 0)$, sînt inverse una alteia.

Avem :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ și } \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2},$$

deci, punînd $y = \frac{1}{x}$, avem $y^2 = \frac{1}{x^2} = -f'(x)$ și, prin urmare, $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Teorema din acest paragraf permite calculul derivatei uneia din funcțiile f și φ, cunoscînd derivata celeilalte. În paragrafele următoare se vor putea astfel calcula derivata funcției exponențiale din cea a funcției logaritmice precum și derivatele funcțiilor circulare inverse din cele ale funcțiilor directe.

§ 5. DERIVATA FUNCȚIEI LOGARITMICE ȘI EXPONENȚIALE

1. Derivata funcției logaritmice

Funcția $f(x) = \ln x$ *este derivabilă pe tot domeniul său de definiție,* $(0, +\infty)$, *și derivata sa este* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Se scrie :

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Fie $x_0 > 0$; să arătăm că f este derivabilă în x_0. Pentru aceasta să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \ln \frac{x}{x_0}.$$

Împărțind și inmulțind în fața logaritmului cu x_0, apoi observînd că $\frac{x}{x_0} = \frac{x_0 + x - x_0}{x_0} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0}$, obținem :

$$R(x) = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{x - x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}}.$$

Dar $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = e$; deoarece funcția logaritmică este continuă, deducem :

$$\lim_{x \to x_0} \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln e = 1.$$

Așadar :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Deoarece x_0 a fost arbitrar, deducem că pentru orice $x > 0$, funcția $\ln x$ este derivabilă și

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Consecințe. 1) *Oricare ar fi* $a > 0$, $a \neq 1$, *funcția logaritmică* $f(x) = \log_a x$ *este derivabilă pe* $(0, +\infty)$ *și derivata sa este* $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Se scrie :

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Într-adevăr, se știe că $\ln x = \ln a \log_a x$ (v. cap. IV), și, deci :

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Deoarece $\ln x$ este derivabilă, rezultă că și $\log_a x$ este derivabilă, și :

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

2) Ținînd seama de regula de derivare a funcțiilor compuse se obțin formulele următoare (unde u este o funcție derivabilă) :

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}, \quad \boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}}$$

3) Funcția $f(x) = \ln |x|$ definită pe $R - \{0\}$ este derivabilă și

$$\boxed{(\ln |x|)' = \frac{1}{x}}$$

Într-adevăr, considerînd $\ln|x|$ ca o funcţie compusă şi ţinînd seama că

$$(|x|)' = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

se obţine:

$$(\ln|x|)' = \frac{(|x|)'}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

Exemple:

1) $f(x) = \ln \sin x$, $(0 < x < \pi)$; $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

2) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = x\left(\dfrac{1}{x}\right)' = x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x}$.

3) $f(x) = [\ln(x+1)]^3$; $f'(x) = 3[\ln(x+1)]^2[\ln(x+1)]'$; şi

$[\ln(x+1)]' = \dfrac{1}{x+1}(x+1)' = \dfrac{1}{x+1}$, deci $f'(x) = 3[\ln(x+1)]^2 \dfrac{1}{x+1}$.

2. Derivata funcţiei exponenţiale

Inversa funcţiei logaritmice $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, definită pe $(0, \infty)$, este funcţia exponenţială $\varphi(y) = a^y$, definită pe R. Deoarece funcţia $f(x) = \log_a x$ este derivabilă şi derivata sa nu se anulează în nici un punct, rezultă că şi *funcţia sa inversă* $\varphi(y) = a^y$ *este derivabilă pe* R şi derivata sa este dată de egalitatea $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, unde $x = \varphi(y) = a^y$. Avem deci

$$(a^y)' = \frac{1}{(\log_a x)'} = \frac{1}{\frac{1}{x \ln a}} = x \ln a = a^y \ln a.$$

Notînd acum cu x argumentul funcţiei exponenţiale, obţinem formula următoare:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Consecinţe. 1) *Derivata funcţiei exponenţiale* $f(x) = e^x$ este e^x. Se scrie:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Într-adevăr, $\ln e = 1$ şi deci

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

2) Ţinînd seama de regula de derivare a funcţiilor compuse, se obţin formulele următoare (unde u este o funcţie derivabilă):

$$\boxed{(e^u)' = e^u u'} \qquad \boxed{(a^u)' = a^u u' \ln a}$$

Exemple:

1) $f(x) = e^{\sin x}$; $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$; $f'(0) = 1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ etc.

2) $f(x) = 2^{\ln x}$; $f'(x) = 2^{\ln x} \ln 2 (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x}$.

3) $f(x) = a^{5x^2-2x+3}$; $f'(x) = 2(5x-1) \cdot a^{5x^2-2x+3} \cdot \ln a$.

4) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

3. **Derivata funcţiei putere**

Funcţia putere $f(x) = x^\alpha$ *(α real) definită pe* $(0, +\infty)$ *este derivabilă, şi* $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Se scrie:

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Într-adevăr

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

deci funcţia putere este o funcţie compusă; derivînd după regula de derivare a funcţiilor compuse, se obţine

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}\left(\alpha \frac{1}{x}\right) = x^\alpha \left(\alpha \frac{1}{x}\right) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

În particular, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, avem $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$,

adică:

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Ținînd seama de regula de derivare a funcțiilor compuse, se obține

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple:

1) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}$, $f'(x) = \dfrac{6x^2 - 10x}{2\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}} = \dfrac{x(3x-5)}{\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}}$;

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x-3}{-x+4}}$, $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{5x-3}{-x+4}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{5x-3}{-x+4}}} = \dfrac{17}{2(4-x)^2}\sqrt{\dfrac{-x+4}{5x-3}}$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{(\sin x + 2x^5)^2} = (\sin x + 2x^5)^{\frac{2}{3}}$;

$$f'(x) = \frac{2}{3}(\sin x + 2x^5)^{-\frac{1}{3}}(\cos x + 10x^4) = \frac{2(\cos x + 10x^4)}{3\sqrt[3]{\sin x + 2x^5}}.$$

Observație. Dacă $\alpha > 0$, funcția $f(x) = x^\alpha$ este definită pe semidreapta închisă $[0, \infty)$. Dacă $\alpha > 1$, funcția este derivabilă și în 0 și derivata sa se obține tot din formula de mai sus:

$$f'(0) = \alpha 0^{\alpha-1} = 0.$$

Într-adevăr, să formăm raportul $R(x)$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$$

și deoarece $\alpha - 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha-1} = 0$, adică $f'(0) = 0$.

Dacă, însă, $0 < \alpha < 1$, atunci $\alpha - 1 < 0$ și $0^{\alpha-1}$ nu are sens; funcția putere nu este derivabilă în punctul 0 în acest caz.

De exemplu, funcția $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, \infty]$ nu este derivabilă în 0. Funcția $f(x) = \sqrt{x^3}$ definită pe $[0, \infty)$ este, însă, derivabilă în 0 și $f'(0) = 0$.

4. Derivata funcției u^v

Dacă u și v sînt două funcții derivabile pe un interval I, astfel ca $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

este derivabilă pe I și

$$f' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Într-adevăr :

$$f = e^{\ln f} = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}.$$

Derivînd acum ca o funcție compusă, se obține :

$$f' = e^{v\ln u}(v \ln u)' = e^{v\ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v v' \ln u + vu^v\frac{u'}{u} = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'.$$

În concluzie :

Funcția u^v se derivează considerînd întîi v constant și derivînd ca o putere, apoi considerînd u constant și derivînd ca o funcție exponențială, și adunînd cele două derivate

Pentru a reține această regulă, convenim să scriem

$$(u^v)' = (u^{v_c})' + (u_c^v)',$$

unde indicele c arată că funcția respectivă se consideră constantă.

Exemple :

1) $f(x) = x^x$; $f'(x) = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$; $f'(1) = 1$.

2) $f(x) = (\sin x)^x$; $f'(x) = x(\sin x)^{x-1}\cos x + (\sin x)^x \ln \sin x =$

$$= (\sin x)^x(x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x);\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

3) $f(x) = (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}}$; $f'(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)^{\sqrt{x}-1} 2(x + 1) +$

$$+ (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x^2 + 2x) = (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}}\left[\frac{2\sqrt{x}(x+1)}{x^2 + 2x} + \frac{\ln(x^2 + 2x)}{2\sqrt{x}}\right].$$

§ 6. DERIVATELE FUNCȚIILOR CIRCULARE INVERSE

1. Derivata funcției arcsin

Inversa funcției $f(x) = \sin x$ definită pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este funcția

$$\varphi(y) = \arcsin y \text{ definită pe } [-1, 1].$$

Se ştie că $f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $\left(\text{deoarece } \cos x \geqslant 0, \text{ pentru } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Avem $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, deci în punctele corespunzătoare $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ funcţia inversă φ nu este derivabilă (v. § 4). Deoarece pentru $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ avem $f'(x) \neq 0$, în punctele corespunzătoare, $y = \sin x \; (-1 < y < 1)$, funcţia $\varphi(y) = \arcsin y$ este derivabilă şi derivata sa este dată de egalitatea:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Notînd acum cu x argumentul funcţiei arcsin, se obţine formula

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad -1 < x < 1.$$

2. Derivata funcţiei arccos

Inversa funcţiei $f(x) = \cos x$ definită pe $[0, \pi]$ este funcţia

$$\varphi(y) = \arccos y \text{ definită pe } [-1, 1].$$

Se ştie că $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x = -\sqrt{\sin^2 x} = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ (deoarece $\sin x \geqslant 0$ pentru $0 \leqslant x \leqslant \pi$). Avem $f'(0) = f'(\pi) = 0$, deci în punctele corespunzătoare $f(0) = \cos 0 = 1$ şi $f(\pi) = \cos\pi = -1$, funcţia inversă φ nu este derivabilă. Deoarece pentru $0 < x < \pi$ avem $f'(x) \neq 0$, în punctele corespunzătoare, $y = \cos x \; (-1 < y < 1)$, funcţia inversă $\varphi(y) = \arccos y$ este derivabilă şi

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Notînd acum cu x argumentul funcţiei arccos, se obţine formula

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad -1 < x < 1.$$

3. **Derivata funcției arctg**

Inversa funcției $f(x) = \text{tg}\, x$ definită pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este funcția $\varphi(y) = \text{arctg}\, y$ definită pe R.

Avem $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x \neq 0$, deci funcția inversă $\varphi(y) = \text{arctg}\, y$ este derivabilă în orice punct $y = \text{tg}\, x, \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, și derivata sa este dată de egalitatea :

$$(\text{arctg}\, y)' = \frac{1}{(\text{tg}\, x)'} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Notînd acum cu x argumentul funcției arctg se obține formula :

$$\boxed{(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

4. **Derivata funcției arcctg**

Inversa funcției $f(x) = \text{ctg}\, x$ definită pe $(0, \pi)$ este funcția $\varphi(y) = \text{arcctg}\, y$ definită pe R.

Avem $f'(x) = (\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{ctg}^2 x) \neq 0$, deci funcția inversă $\varphi(y) = \text{arcctg}\, y$ este derivabilă în orice punct $y = \text{ctg}\, x, (0 < x < \pi)$, și derivata sa este dată de egalitatea :

$$(\text{arcctg}\, y)' = \frac{1}{(\text{ctg}\, x)'} = -\frac{1}{1 + \text{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Notînd acum cu x argumentul funcției arcctg, se obține formula

$$\boxed{(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

Ţinînd seama de regula de derivare a funcţiilor compuse, se obţin formulele următoare (unde u este o funcţie derivabilă) :

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

Exemple:

1) $f(x) = \arcsin(x^2 - x)$;

$$f'(x) = \frac{(x^2-x)'}{\sqrt{1-(x^2-x)^2}} = \frac{2x-1}{\sqrt{(1-x^2+x)(1+x^2-x)}}\ ;\ f'(0) = -1.$$

2) $f(x) = \arccos\frac{1}{x^2}$;

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}};\quad f'(2) = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

3) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+x}$;

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2} = \frac{1}{2x(x+1)+1};\quad f'(0) = 1.$$

4) $f(x) = \operatorname{arcctg}\ln x$;

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{1+\ln^2 x} = -\frac{1}{x(1+\ln^2 x)};\quad f'(1) = -1.$$

Observaţie. Polinoamele, funcţiile raţionale, funcţia putere, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică, funcţiile circulare directe şi inverse sînt derivabile pe domeniul lor de definiţie (cu excepţiile menţionate la funcţia putere şi la funcţiile arcsin şi arccos). Deoarece orice funcţie elementară se obţine din funcţiile enumerate mai sus prin operaţii algebrice şi operaţia de compunere şi deoarece aceste operaţii conduc tot la funcţii derivabile, rezultă că toate funcţiile elementare sînt derivabile pe domeniul lor de definiţie (cu excepţiile specificate mai sus relativ la funcţia putere, funcţia arcsin şi funcţia arccos).

Reguli de derivare (*recapitulare*)

1. $(u+v)' = u' + v'$; 2. $(u-v)' = u' - v'$; 3. $(uv)' = u'v + v'u$;

4. $(cu)' = cu'$; 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; 6. $[\varphi(u)]' = \varphi'(u)\,u'$;

7. $(u^v)' = ({}^{vc}_{u})' + (u^v_c)'$.

Tabloul derivatelor unor funcții elementare

(Recapitulare)

Nr.	Funcția f	Derivata f'	Mulțimea pe care există derivata
1	c (constant)	0	R
2	x	1	R
3	x^n (n natural)	nx^{n-1}	R
4	$\frac{1}{x^n}$ (n natural)	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$R - \{0\}$
5	x^α ($\alpha > 1$)	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[0, +\infty)$
6	x^α ($\alpha < 1$)	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
7	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
8	$\sin x$	$\cos x$	R
9	$\cos x$	$-\sin x$	R
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	R
15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	R
16	e^x	e^x	R
17	a^x, ($a > 0$, $a \neq 1$)	$a^x \ln a$	R
18	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
19	$\log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$)	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$
20	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$R - \{0\}$

§ 7. DIFERENŢIALA

1. Definiţia diferenţialei

Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I şi x_0 un punct din I; fie $f'(x_0)$ derivata lui f în x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă se notează

$$\alpha(x) = f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (x \neq x_0)$$

atunci:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \alpha(x), \quad (x \neq x_0)$$

şi:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = f'(x_0) - \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Deoarece $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, rezultă că pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0 se poate realiza ca $\alpha(x)$ să fie cît dorim de mic; deci, pentru astfel de valori ale lui x, raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este aproximativ egal cu $f'(x_0)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0).$$

Aşadar:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Dacă se notează $x - x_0 = h$, atunci $x = x_0 + h$; relaţia precedentă se scrie astfel:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, h$$

şi exprimă faptul că, pentru creşteri h suficient de mici ale argumentului, de la x_0 la $x_0 + h$, creşterea corespunzătoare $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a funcţiei poate fi aproximată cu produsul $f'(x_0)\, h$. Atît creşterea funcţiei, $f(x_0 + h) - f(x_0)$, cît şi produsul $f'(x_0)\, h$ sînt funcţii de h: la diferite creşteri h corespund diferite creşteri ale funcţiei, respectiv diferite produse $f'(x_0)\, h$ (adică

diferite aproximații ale creșterii funcției). Evident, cu cît creșterea h este mai mică (cu cît x este mai apropiat de x_0), cu atît $f'(x_0)\,h$ este mai apropiat de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (deci eroarea comisă în aproximație este cu atît mai mică).

Definiție. *Funcția $f'(x_0)\,h$ (cu argumentul h) se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează $\mathrm{d}f(x_0)$:*

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,h.$$

Din cele de mai sus rezultă că *diferențiala $\mathrm{d}f(x_0)$ aproximează creșterea $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a funcției:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0).$$

Diferențiala funcției f într-un punct oarecare $x \in I$ se scrie

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,h.$$

De exemplu, pentru $f(x) = x^2 + 1$, se obține $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(x^2 + 1) = 2\,xh$.

Pentru funcția identică $\varphi(x) = x$, avem $\mathrm{d}\varphi(x) = \mathrm{d}(x) = x'h = h$.

Așadar, *diferențiala $\mathrm{d}(x)$ a funcției identice este egală cu creșterea h a argumentului.* În loc de $\mathrm{d}(x)$ se obișnuiește să se scrie, mai simplu, $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = h.$$

În loc de *diferențiala funcției identice*, $\mathrm{d}x$ se numește, mai simplu, *diferențiala argumentului.*

Făcînd raportul dintre diferențiala lui f și diferențiala argumentului, se obține:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)\,h}{h} \equiv f'(x).$$

Derivata lui $f(x)$ este deci egală cu raportul a două diferențiale: diferențiala lui $f(x)$ și diferențiala lui x. Se justifică astfel una din notațiile derivatei indicate în § 2:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Rezultă deci:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Așadar, *diferențiala lui f este egală cu produsul dintre derivata lui f și diferențiala argumentului.*

Observație. Modul în care se notează argumentul nu este esențial. Se poate scrie: $\mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}f(t) = f'(t)\,\mathrm{d}t$ etc.

Exemple:

1) $f(x) = x^2 + 2$; $df(x) = d(x^2 + 2) = 2\,x dx$.

Pentru $x = 1$, se obține $df(1) = 2\,dx$. Se observă că $df(1)$ este funcție de dx; de exemplu, pentru $dx = \frac{1}{2\,000}$, valoarea acestei funcții este $\frac{1}{1\,000}$.

Pentru $x = 2$, se obține $df(2) = 4\,dx$. Diferențiala $df(2)$ este de asemenea funcție de dx; de exemplu, pentru $dx = \frac{1}{2\,000}$, valoarea acestei funcții este $\frac{2}{1\,000}$.

2) $g(u) = \sin 3u$; $dg(u) = d \sin 3u = 3 \cos 3u\, du$.

3) $u(t) = \frac{1}{t}$; $du(t) = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}\, dt$.

Interpretarea geometrică a diferențialei este simplă (fig. 96).

Creșterea dx a argumentului este lungimea catetei MN din triunghiul dreptunghic MNT, iar $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Diferențiala $f'(x)\,dx$ este lungimea catetei NT. Creșterea $f(x + dx) - f(x)$ este lungimea segmentului NM'. Pentru creșteri dx suficient de mici ale argumentului, segmentele NT și NM' sînt aproximativ egale. Așadar, *în jurul punctului M, pe o porțiune suficient de mică, graficul poate fi înlocuit cu un segment al tangentei.*

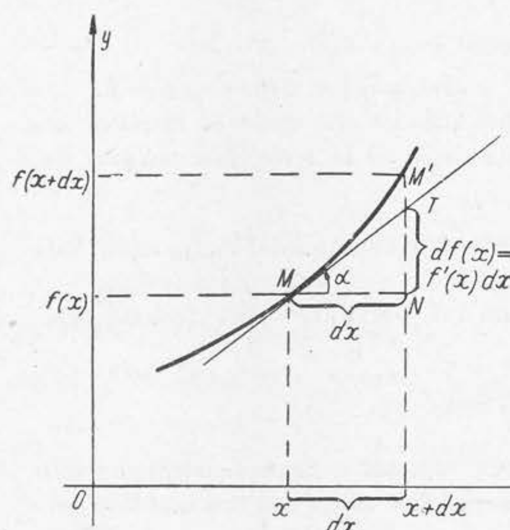


Fig. 96

Diferențialele vor fi folosite în capitolul XI pentru calculul integralelor.

Deoarece de multe ori este mai ușor de calculat diferențiala decît creșterea funcției, diferențiala se folosește pentru calculul cu aproximație al creșterii unei funcții, corespunzătoare unei anumite creșteri a argumentului. În ceea ce privește evaluarea erorii comise prin această aproximare, diferențialele nu dau nici o indicație.

Exemplu. Să se calculeze cu cît crește aria unui cerc de rază 98,5 m, dacă raza crește cu 0,1 m.

Aria A a cercului este dată de egalitatea $A = f(R) = \pi R^2$, deci $dA = 2\pi R\, dR$. Avem $R = 98{,}5$, $dR = 0{,}1$, deci $dA = 2\pi \cdot 98{,}5 \cdot 0{,}1 \approx 61{,}858$ m². Creșterea exactă a ariei este $\pi\,(R + dR)^2 - \pi R^2 = \pi \cdot 98{,}6^2 - \pi \cdot 98{,}5^2 = \pi\,(98{,}6^2 - 98{,}5^2) = \pi\,(9721{,}96 - 9702{,}25) = \pi \cdot 19{,}71 \approx 61{,}8894$.

Se vede din acest exemplu că se calculează mai ușor diferențiala decît creșterea ariei.

2. Reguli de diferențiere

Din fiecare regulă de derivare se obține o regulă de diferențiere, înlocuind derivata unei funcții cu diferențiala sa:

1) $d(u+v) = du + dv$; $d(u-v) = du - dv$;

2) $d(uv) = vdu + udv$; $d(cu) = cdu$;

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Pentru exemplificare, să demonstrăm formula diferențialei produsului:

$$d(uv) = (uv)'\,dx = (u'v + v'u)\,dx = u'vdx + v'udx =$$
$$= v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv.$$

La fel se demonstrează și celelalte formule:

Exemple:

1) $$d\frac{x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\,dx - x\,d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\,dx - x\cdot 2xdx}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

2) $d(e^x \sin x) = \sin x \cdot de^x + e^x \cdot d(\sin x) = \sin x \cdot e^x dx + e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x)\,dx$.

3. Diferențiala unei funcții compuse

Fie $f(u(x))$ o funcție compusă, derivabilă pe un interval I.
Derivata sa este:

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

și diferențiala sa este:

$$df(u(x)) = [f(u(x))]'\,dx = f'(u(x)) \cdot u'(x)\,dx.$$

Dar $u'(x)\,dx$ este diferențiala funcției $u(x)$:

$$du(x) = u'(x)\,dx,$$

astfel încît diferențiala funcției compuse se scrie:

$$df(u(x)) = f'(u(x)) \cdot du(x).$$

Dacă nu se mai pune în evidență argumentul x, această egalitate se scrie astfel :

$$\boxed{df(u) = f'(u)\, du}$$

Trebuie reținut că, în această egalitate, u nu este variabilă independentă, ci o funcție de x. Totuși, formal, această egalitate se prezintă ca și cînd $f(u)$ nu ar fi o funcție compusă, de argumentul x, ci o funcție al cărei argument ar fi u.

Această formulă ușurează de multe ori calculul diferențialei unei funcții compuse. Din regulile de derivare a funcțiilor elementare compuse se obțin imediat regulile de diferențiere a acestor funcții :

1) $du^n = nu^{n-1}\, du$ (n natural).

2) $du^{-n} = -nu^{-n-1}\, du$ (n natural).

3) $d\sqrt{u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\, du.$

4) $d \sin u = \cos u\, du$; $d \cos u = -\sin u\, du.$

5) $d\, \mathrm{tg}\, u = \dfrac{1}{\cos^2 u}\, du$; $d\, \mathrm{ctg}\, u = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\, du.$

6) $d\, \mathrm{arctg}\, u = \dfrac{1}{1+u^2}\, du$; $d\, \mathrm{arcctg}\, u = -\dfrac{1}{1+u^2}\, du.$

7) $d \arcsin u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$; $d \arccos u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$

8) $da^u = a^u \ln a\, du.$

9) $d \ln u = \dfrac{1}{u}\, du.$

Exemple :

$$d(3x+2)^5 = 5(3x+2)^4 \cdot d(3x+2) = 5(3x+2)^4 \cdot 3\, dx = 15(3x+2)^4\, dx.$$

$$d\frac{1}{(7x^2+1)^3} = d(7x^2+1)^{-3} = -3(7x^2+1)^{-4} \cdot d(7x^2+1) = -\frac{3}{(7x^2+1)^4}\, 14\, x\, dx =$$

$$= -\frac{42\, x}{(7x^2+1)^4}\, dx.$$

$$d\sqrt{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot d(\sin x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x\, dx.$$

$$d(\sin e^x) = \cos e^x \cdot de^x = e^x \cos e^x\, dx.$$

$$d(\mathrm{tg} \ln x) = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot d(\ln x) = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}\, dx.$$

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot \mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}\,(\ln \sin^2 x) = \frac{1}{\sin^2 x}\cdot \mathrm{d}\,(\sin^2 x) = \frac{1}{\sin^2 x}\,2\sin x\cdot \mathrm{d}\,(\sin x) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}\,2\sin x\cdot\cos x\cdot \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x.$$

§ 8. DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

1. Definiţia derivatelor de ordin superior

Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I. Derivata sa f' este de asemenea o funcţie definită pe I, deci se poate pune problema derivabilităţii sale.

Dacă f' este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, se spune că f este derivabilă de două ori în x_0. Derivata în x_0 a lui f' se numeşte derivata de ordinul doi în x_0 a lui f şi se notează $f''(x_0)$:

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Se obişnuieşte de asemenea să se noteze derivata de ordinul doi a lui f în x_0 prin $D^2 f(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}x^2}$.

Dacă f este derivabilă de două ori pe întreg intervalul I, funcţia f'' definită pe I se numeşte *derivata a doua* (sau *derivata de ordinul doi*) a lui f. Pentru uniformitate, derivata f' se numeşte *derivata întîi* (sau *derivata de ordinul întîi*) a lui f, iar funcţia f însăşi se numeşte *derivata de ordinul zero* a lui f.

Se defineşte în mod analog *derivata a treia*, f''', a lui f, ca fiind derivata derivatei a doua : $f''' = (f'')'$, sau $D^3 f = D(D^2 f)$.

Derivatele de ordinul zero, întîi, doi, trei se notează respectiv cu $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$:

$$f^{(0)} = f;\ f^{(1)} = f';\ f^{(2)} = f'';\ f^{(3)} = f'''.$$

În general, derivata de ordinul n (n natural), dacă există, se notează cu $f^{(n)}$ sau $D^n f$ şi se defineşte ca fiind derivata derivatei de ordinul $n-1$:

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]',\ \text{sau}\ D^n f = D(D^{n-1} f).$$

Exemple:

1) $f(x) \equiv \alpha$; $f'(x) \equiv 0$, $f''(x) \equiv 0$, ..., $f^{(n)}(x) \equiv 0$, $(n \geqslant 1)$.

2) $g(x) = x$; $g'(x) \equiv 1$, $g''(x) \equiv 0$, ..., $g^{(n)}(x) \equiv 0$, $(n \geqslant 2)$.

3) $h(x) = \sin x$; $h'(x) = \cos x$; $h''(x) = -\sin x$; $h'''(x) = -\cos x$;

$$h^{IV}(x) = \sin x, \ldots$$

În particular: $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $h''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $h'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $h^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; ...

2. Rădăcinile multiple ale unui polinom

În acest număr vor fi studiate cu ajutorul derivatelor de ordin superior rădăcinile multiple ale polinoamelor.

Fie $P(x)$ un polinom. Să considerăm ecuația $P(x) = 0$.

Pentru prescurtare, rădăcinile acestei ecuații se numesc rădăcini ale polinomului $P(x)$.

Se știe din clasele anterioare că a este rădăcină a polinomului $P(x)$ dacă și numai dacă $P(x)$ este divizibil cu $(x - a)$, deci dacă și numai dacă există un polinom $Q(x)$ astfel încît să aibă loc identitatea

$$P(x) \equiv (x - a)\, Q(x).$$

Polinomul $Q(x)$ are gradul mai mic cu o unitate decît gradul lui $P(x)$.

De asemenea, se știe că a este o rădăcină multiplă de ordinul k $(k \geqslant 0)$ a polinomului $P(x)$, dacă și numai dacă există un polinom $Q(x)$, astfel încît

$$P(x) = (x - a)^k\, Q(x)$$

și $Q(a) \neq 0$.

Cînd $k = 1, 2, 3, \ldots$, numărul a se numește — respectiv — rădăcină simplă (de ordinul 1), dublă (de ordinul 2), triplă (de ordinul 3) ș.a.m.d.

În cazul cînd $k = 0$, a nu este rădăcină a lui $P(x)$; se spune că a este rădăcină de ordinul zero a lui $P(x)$.

I) *Dacă a este o rădăcină de ordinul $k \geqslant 1$ a polinomului $P(x)$, atunci a este rădăcină de ordinul $k - 1$ a derivatei $P'(x)$.*

Într-adevăr, dacă a este rădăcină de ordinul k a lui $P(x)$ se poate scrie identitatea

$$P(x) = (x - a)^k\, Q(x), \text{ (unde } Q(a) \neq 0).$$

Prin derivare, se obține:

$$P'(x) = k(x - a)^{k-1}\, Q(x) + (x - a)^k\, Q'(x) = (x - a)^{k-1}[k\, Q(x) + (x - a)\, Q'(x)].$$

Dacă notăm $Q_1(x) = kQ(x) + (x - a) Q'(x)$, rezultă:

$$Q_1(a) = kQ(a) \neq 0$$

şi

$$P'(x) = (x - a)^{k-1} Q_1(x),$$

deci a este rădăcină de ordinul $k - 1$ a derivatei $P'(x)$.

În particular, dacă a este rădăcină simplă a lui $P(x)$, a nu este rădăcină a derivatei $P'(x)$.

Exemple:

1) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ sau $P(x) = (x + 1)^2$; -1 este rădăcină dublă a acestui polinom. $P'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$; -1 este rădăcină simplă a derivatei $P'(x)$.

2) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$; 2 este rădăcină triplă a lui $P(x)$. $P'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$; 2 este rădăcină dublă a derivatei $P'(x)$.

Observaţie. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. O rădăcină simplă sau multiplă a derivatei $P'(x)$ poate să nu fie rădăcină a polinomului $P(x)$. De exemplu: $P(x) = x^2 + 2x + 3$, $P'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$; -1 este rădăcină a derivatei $P'(x)$, dar nu este rădăcină a polinomului $P(x)$, deoarece $P(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$.

II) *Dacă a este o rădăcină a polinomului $P(x)$ şi dacă a este rădăcină de ordinul $k - 1 \geqslant 0$ a derivatei $P'(x)$, atunci a este rădăcină de ordinul k a lui $P(x)$.*

Într-adevăr, dacă p este ordinul de multiplicitate al rădăcinii a pentru polinomul $P(x)$, $(p \geqslant 1)$, atunci, conform proprietăţii *I*, a este rădăcină multiplă de ordinul $p - 1$ pentru $P'(x)$. Deci

$$p - 1 = k - 1,$$

de unde $p = k$; prin urmare a este rădăcină de ordinul k a lui $P(x)$.

Exemplu:

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Observăm că $P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$. $P'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$; 2 este rădăcină dublă a derivatei $P'(x)$. Urmează că 2 este rădăcină triplă a lui $P(x)$.

Teoremă. Un număr a este rădăcină de ordinul k a polinomului $P(x)$ dacă, şi numai dacă

$$P(a) = 0,\ P'(a) = 0,\ \ldots,\ P^{(k-1)}(a) = 0,\ P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Într-adevăr, dacă a este rădăcină de ordinul k a lui $P(x)$, atunci, conform proprietăţii I, a este rădăcină de ordinul $k - 1$ a lui $P'(x)$, deci rădăcină de ordinul $k - 2$ a lui $P''(x)$ ş.a.m.d., deci rădăcină simplă a lui $P^{(k-1)}(x)$ şi deci *nu* este rădăcină a lui $P^{(k)}(x)$. Reciproc, dacă

$$P(a) = 0,\ P'(a) = 0,\ \ldots,\ P^{(k-1)}(a) = 0,\ P^{(k)}(a) \neq 0,$$

din proprietatea II rezultă că, deoarece $P^{(k)}(a) \neq 0$, a este rădăcină simplă a lui $P^{(k-1)}(x)$, deci rădăcină dublă a lui $P^{(k-2)}(x)$ ş.a.m.d.

Din această teoremă se deduce următoarea regulă:

Dacă se ştie că a este rădăcină a polinomului $P(x)$, pentru a stabili ordinul de multiplicitate al acestei rădăcini, se calculează valoarea derivatelor $P'(x)$, $P''(x)$, ..., în punctul a; ordinul primei derivate din acest şir care *nu* se anulează în a este ordinul de multiplicitate al rădăcinii a pentru $P(x)$.

Exemple:

1) $P(x) = 7x^6 - 7$; $\quad P(1) = 7 - 7 = 0$;
$P'(x) = 42x^5$; $\quad P'(1) = 42 \neq 0$;

deci 1 este rădăcină simplă a lui $P(x)$.

2) $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$; $\quad P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$;
$P'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 1$ şi $P'(1) = 5 - 4 - 1 = 0$;
$P''(x) = 20x^3 - 12x^2$ şi $P''(1) = 20 - 12 = 8 \neq 0$;

deci 1 este rădăcină dublă a lui $P(x)$.

§ 9. APLICAŢII ALE DERIVATELOR ÎN FIZICĂ

1. Viteza în mişcarea rectilinie

Să considerăm un mobil M care se mişcă pe o dreaptă Ox (fig. 97) şi să presupunem că se cunoaşte — în fiecare moment t — abscisa s a poziţiei mobilului. Această abscisă este funcţie (depinde) de timp, $s(t)$. La începutul capitolului a fost definită viteza $v(t_0)$ pe care o are mobilul cînd trece prin punctul M_0, corespunzător momentului t_0, ca fiind limita următoare:

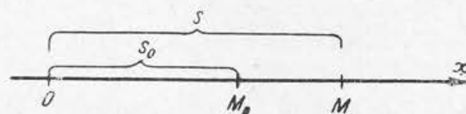


Fig. 97

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dar, limita din membrul drept este derivata $s'(t_0)$ a funcţiei $s(t)$ în punctul t_0, deci

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{ds(t_0)}{dt}.$$

Aşadar:

Viteza în mişcarea rectilinie este derivata spaţiului în raport cu timpul.

De aici rezultă, în particular, că *dacă mișcarea este uniformă, viteza este constantă.*

Într-adevăr, în mișcarea uniformă legea de mișcare este :

$$s(t) = \alpha t + b, \text{ deci } v(t) = \alpha.$$

Exemple :

1) Dacă mobilul se mișcă pe axa Ox după legea

$$s(t) = 2t - 3,$$

viteza sa este

$$v(t) = s'(t) = 2.$$

Viteza mobilului este constantă, fapt care se explică prin aceea că mișcarea este uniformă.

2) Dacă legea de mișcare pe axa Ox este

$$s(t) = 3t^4 - 2t + 1,$$

viteza sa este

$$v(t) = 12t^3 - 2.$$

La momentul $t = 0$, mobilul are viteza $v(0) = -2$; la momentul $t = 1$, viteza este $v(1) = 10$.

2. Accelerația în mișcarea rectilinie

a) Să considerăm un mobil în mișcare rectilinie. Să presupunem că viteza sa este

$$v(t) = 2t + 1.$$

Viteza nu este constantă, deci mișcarea nu este uniformă. Ne interesează în aceste condiții creșterea vitezei în unitatea de timp. Creșterea vitezei de la $t = 0$ la $t = 1$ este :

$$v(1) - v(0) = 3 - 1 = 2.$$

Creșterea vitezei de la $t = 1$ la $t = 2$ este :

$$v(2) - v(1) = 5 - 3 = 2.$$

În general, creșterea vitezei de la $t = t_0$ la $t_0 + 1$ este

$$v(t_0 + 1) - v(t_0) = 2(t_0 + 1) + 1 - (2t_0 + 1) = 2.$$

Așadar, în orice interval de timp de o secundă, viteza crește cu 2 m/s.

Dacă măsurăm creșterea vitezei $v(t_2) - v(t_1)$ între două momente oarecare t_1 și t_2 și împărțim această creștere a vitezei la creșterea $t_2 - t_1$ a timpului de la t_1 la t_2, obținem :

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 + 1 - (2t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2.$$

Așadar, raportul dintre creșterea vitezei și creșterea timpului este constant, sau — altfel spus — creșterea vitezei este proporțională cu creșterea timpului.

Dacă într-o mișcare, creșterea vitezei este proporțională cu creșterea timpului (adică dacă $v(t) = at + C$), raportul constant dintre creșterea vitezei și creșterea timpului se numește accelerație. În acest caz se spune că mișcarea este uniform accelerată.

b) Să considerăm acum un alt mobil în mișcare rectilinie și să presupunem că viteza sa este

$$v(t) = t^2.$$

Să calculăm și în acest caz creșterea vitezei într-o secundă

$$v(1) - v(0) = 1,$$
$$v(2) - v(1) = 4 - 1 = 3,$$
$$v(3) - v(2) = 9 - 4 = 5.$$

Observăm că, în intervale de timp egale, creșterea vitezei nu este aceeași. În general, raportul

$$a_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{t_1^2 - t_0^2}{t_1 - t_0} = t_1 + t_0$$

se modifică o dată cu t_0 și t_1. Acest raport poate fi considerat ca o accelerație medie a mobilului în intervalul de timp de la t_0 la t_1, în sensul că un mobil în mișcare uniform accelerată cu accelerația a_1 și-ar modifica viteza în intervalul de timp de la t_0 la t_1, cu același număr de m/s ca și mobilul considerat.

Pentru intervalul de timp de la t_0 la alt moment t_2, accelerația medie este:

$$a_2 = \frac{v(t_2) - v(t_0)}{t_2 - t_0} = t_2 + t_0.$$

Ne dăm seama ușor că, cu cît intervalul de timp este mai mic, cu atît modificarea vitezei medii este mai mică. Sîntem astfel conduși să considerăm limita acestui raport:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} (t + t_0) = 2t_0,$$

care este, *prin definiție, accelerația* $a(t_0)$ a mobilului în momentul t_0 al trecerii sale prin poziția M_0. Dar, limita acestui raport este derivata $v'(t_0)$ a funcției $v(t)$. Așadar

$$a(t_0) = v'(t_0).$$

Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul.

Ținînd seama de faptul că viteza este la rîndul său derivata spațiului, deducem că:

Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.

Exemple: 1) Dacă mobilul se mișcă după legea $s(t) = \alpha t + b$, viteza sa este $v(t) = \alpha$ (viteza este constantă, ceea ce se explică prin faptul că mișcarea este uniformă), iar accelerația sa este $a(t) \equiv 0$. Așadar, într-o mișcare uniformă, accelerația este nulă.

2) Dacă mobilul se mișcă după legea $s(t) = \alpha t^2 + bt + c$, viteza sa este $v(t) = 2\alpha t + b$, iar accelerația sa este $a(t) = 2\alpha$.

Accelerația este constantă, ceea ce se explică prin faptul că mișcarea este uniform accelerată.

3. **Debitul unui lichid**

Să considerăm un lichid în scurgere (de exemplu apa prin robinet). Să notăm cu $Q(t)$ cantitatea de lichid care se scurge în intervalul de timp t, începînd de la un anumit moment de referință, pe care-l notăm cu 0. Pentru a măsura cantitatea de lichid scursă între momentele t_1 și t_2 se face diferența $Q(t_2) - Q(t_1)$. Dacă în intervale egale de timp se scurg cantități egale de lichid, se spune că *debitul* lichidului este *constant*.

În acest caz se numește *debit* cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Putem calcula debitul, făcînd raportul

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

între creșterea cantității de lichid $Q(t_2) - Q(t_1)$ și creșterea timpului $t_2 - t_1$ t_1 și t_2 fiind două momente oarecare.

Dacă debitul nu este constant, raportul

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

se numește *debitul mediu* în intervalul de timp dintre t_1 și t_2.

Se numește debit $D(t_0)$ al lichidului la momentul t_0 limita debitului mediu $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$, cînd creșterea timpului tinde către 0 (sau cînd t tinde către t_0):

$$D(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0).$$

Așadar:

Debitul este derivata cantității de lichid, în raport cu timpul.

Exemple:

1) $Q(t) = t^3 - \sqrt{t+1}$; $D(t) = 3t^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$;

2) $Q(t) = e^t$; $D(t) = e^t$.

4. Intensitatea curentului electric

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemăna cu un lichid de scurgere printr-o conductă. Putem vorbi şi în acest caz de cantitatea de electricitate $Q(t)$ scursă prin conductor într-un timp t, începînd de la un anumit moment de referinţă.

Putem vorbi de asemenea de debitul de electricitate ca fiind derivata cantităţii de electricitate în raport cu timpul.

Debitul de electricitate se numeşte *intensitatea curentului electric* şi se notează cu I:

$$I(t) = Q'(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

5. Densitatea liniară a unei bare (a unei repartiţii liniare de masă)

Să considerăm o bară OA (fig. 98). Să notăm cu $m(x)$ masa porţiunii Ox din bară. Dacă diferite porţiuni de lungime egală au mase egale, se spune că bara este *omogenă*. Împărţind masa $m(x_1) - m(x_0)$ a unei porţiuni $(x_0\ x_1)$ din bară, la lungimea sa $x_1 - x_0$, obţinem densitatea liniară ρ a barei:

$$\rho = \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

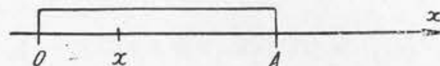


Fig. 98

Dacă bara nu este omogenă, raportul

$$\rho = \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se numeşte *densitatea medie* a porţiunii $(x_0\ x_1)$. O altă bară omogenă de aceeaşi lungime $x_1 - x_0$ şi de densitate ρ ar avea aceeaşi masă. Pentru porţiuni de lungime diferită, se obţin densităţi medii diferite. În acest caz densitatea $\rho(x_0)$ a barei, în punctul de abscisă x_0, este — prin definiţie — limita densităţii medii $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$, cînd x tinde către x_0:

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Dar limita aceasta este derivata $m'(x_0)$ a funcţiei $m(x)$ în punctul (x_0) aşa încît :

$$\rho(x_0) = m'(x_0) = \frac{dm(x_0)}{dx}.$$

Aşadar :

Densitatea unei repartiţii liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.

EXERCIŢII

Utilizînd direct definiţia derivatei, să se stabilească dacă următoarele funcţii sînt derivabile în punctele specifice şi — cînd este cazul — să se calculeze derivatele în punctele respective :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 3$ în $x = 1$; **2.** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$ în $x = 3$;

3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ în $x = -2$; **4.** $f(x) = \sqrt{x}$ în $x = 1$;

5. $f(x) = \cos x$ în $x = 0$; **6.** $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \cos 3x$ în $x=0$;

7. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ pentru } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1, \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ în $x = 1$;

8. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0, \text{ pentru } x = 0; \end{cases}$ în $x = 0$.

9. Fiind dată funcţia :

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3,$$

să se determine α, astfel încît tangenta la graficul funcţiei în punctul $(2, f(2))$, să fie paralelă cu prima bisectoare.

10. Fiind dată funcţia

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^2 - 1},$$

să se determine α, astfel încît tangenta la graficul funcţiei în punctul $(3, f(3))$ să formeze cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi de 60°.

Aplicînd regulile de la § 3, nr. 1, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

11. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 1$. **12.** $f(x) = x^5 - 24x^4 + 16x$.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6.$ 14. $f(x) = \frac{1}{7}x^6 - 3x^5 + \frac{2}{3}x^3.$

15. $f(x) = 7\sin x - 2x^3 + 1.$ 16. $f(x) = 5x^4 - 2\cos x + \frac{1}{2}x^2 + 3\sin x.$

17. $f(x) = 2\cos x - x^2 \sin x.$ 18. $f(x) = 5\sin x\cos x - 1.$

19. $f(x) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$

20. $f(x) = (x^2 - 2x)(x + 1)\sin x.$ 21. $f(x) = (x^2 + x + 1)^9.$

22. $f(x) = (3x - 2)^{732}(5x^2 + 1).$ 23. $f(x) = \cos^7 x.$

24. $f(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x.$ 25. $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$

26. $f(x) = \sin^3 x\cos x.$

27. $f(x) = \sin^m x\cos^n x$ (m, n numere naturale).

28. $f(x) = 3(2 - x^2)^{432}\sin^2 x.$

29. $f(x) = \frac{1}{8}\sin^5 x\cos^3 x - \frac{1}{16}\sin^3 x\cos^3 x + \frac{3}{64}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{128}\sin x\cos x + \frac{3}{128}x.$

30. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$ 31. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$ 32. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$

33. $f(x) = \frac{3x-1}{x^5}.$ 34. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$ 35. $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}.$

36. $f(x) = \frac{1}{\sin x}.$ 37. $f(x) = \frac{1}{\cos x}.$ 38. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$

39. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}.$ 40. $f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$

41. $f(x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$ 42. $f(x) = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$

43. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x.$ 44. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}.$

45. $f(x) = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x.$

Aplicînd regula de derivare a funcţiilor compuse (§ 3, nr. 2) să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

46. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right).$ 47. $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}^2 x.$

48. $f(x) = \dfrac{2 + \sin 2x}{\cos 2x}$.   49. $f(x) = \cos^3(2x - 1)\sin(2x - 1)$.

50. $f(x) = 3\sin^2[(x^2 + x + 1)^4]$.

51. $f(x) = \sin(\sin x)$.   52. $f(x) = \operatorname{tg}(\cos x^2)$.

53. $f(x) = \operatorname{tg}^2(\cos x)$.   54. $f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$.

55. $f(x) = \sin^n x \cdot \cos nx$.   56. $f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$.

Aplicînd regulile de la § 5, nr. 1, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

57. $f(x) = x \ln x - x$.   58. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.   59. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

60. $f(x) = \ln(3x - 1)$.   61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)^2$.

62. $f(x) = \lg(x^3 - 1)^4$.   63. $f(x) = \ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$.

64. $f(x) = \ln\dfrac{3 - x^2}{2 - x^2}$.   65. $f(x) = \ln \sin x$.

66. $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$.   67. $f(x) = \ln \ln x$.

68. $f(x) = \ln \cos^n x$ (n număr natural).

69. $f(x) = \ln(\ln(1 + x^2))$.   70. $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$.

71. $f(x) = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.   72. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

Aplicînd regulile de la § 5, nr. 2, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

73. $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$.   74. $f(x) = e^{5x}(\sin 3x + 1)$.

75. $f(x) = e^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$.   76. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

77. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.   78. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.   79. $f(x) = e^{-x^2}$.

80. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.   81. $f(x) = (a)^{x^n}$, (n număr natural).

82. $f(x) = a^{3x^2 + 6x + 1}$.   83. $f(x) = a^{\frac{x+1}{x-1}}$.   84. $f(x) = \dfrac{2^x(x \ln 2 - 1)}{\ln^2 2}$.

Aplicînd regulile de la § 5, nr. 3, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

85. $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + 3x + 1$.   86. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3x^2$.

87. $f(x) = x^{\sqrt{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} + 2x^5 + 3.$ 88. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

89. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}.$ 90. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}.$

91. $f(x) = (3x + 2)(x - 1)^{\frac{3}{2}}.$ 92. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

93. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$ 94. $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}.$

95. $f(x) = x(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 + x^2}.$ 96. $f(x) = e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - 6).$

97. $f(x) = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ 98. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{10 + 3x}{10 - 3x}}.$

99. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}.$

100. $f(x) = \ln\left[(x - 1)\sqrt{x^2 + 1}\right] - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$

101. $f(x) = e^x\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}}.$

Aplicînd regula de la § 5, nr. 4, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

102. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$ 103. $f(x) = x^{\sqrt{x}}.$

104. $f(x) = x^{\sin x}.$ 105. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{1 + x^2}.$

Aplicînd regulile de la § 6, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii :

106. $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$; $f'(2) = ?$, $f'(-2) = ?$

107. $f(x) = (\arcsin x)^2.$ 108. $f(x) = \arcsin(x^2).$

109. $f(x) = \arcsin(\sin x).$ 110. $f(x) = \arcsin\frac{1}{1 + x^2}$; $f'(1) = ?$; $f'(-1) = ?$

111. $f(x) = \arccos\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; $f'(3) = ?$, $f'(-3) = ?$

112. $f(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$ 113. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x + 1}{x - 1}.$

114. $f(x) = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$. **115.** $f(x) = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 - x^2}$.

116. $f(x) = e^{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii în punctele specificate:

117. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^5 + \ln(x+1)$ în punctul $x = 1$.

118. $f(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \frac{1 - x}{1 + x}$ în punctul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

119. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin x}{(b + a \cos x)}$ $(a + b \neq 0)$ în punctul $x = 0$.

Utilizînd rezultatele de la § 7, să se calculeze diferenţialele funcţiilor de mai jos pentru valorile specificate în dreptul fiecăreia:

120. $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) $x = 1$, $dx = \frac{1}{10}$; b) $x = 1$, $dx = \frac{1}{120}$; c) $x = -1$, $dx = \frac{1}{120}$.

121. $f(x) = xe^x$; $x = 0$, $dx = \frac{1}{10}$.

122. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $x = 1$; $dx = \frac{1}{100}$.

123. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $x = \frac{1}{2}$; $dx = \frac{1}{100\sqrt{3}}$.

124. $f(x) = \ln(1 - x^2)$; $x = -\frac{1}{2}$; $dx = \frac{1}{4\,000}$.

125. Un rezervor cilindric cu raza de 2,7 m conţine lichid pînă la înălţimea de 8,2 m. Ce volum de lichid trebuie scos pentru ca nivelul lichidului să coboare cu 15 cm?

126. Un curent electric de 120 volţi trece printr-o rezistenţă de 550 ohmi. Cu cît se modifică intensitatea curentului, cînd rezistenţa creşte cu 5 ohmi?

Să se arate că funcţiile următoare verifică identităţile scrise în dreptul fiecăreia:

127. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $(1 - x^2) f'(x) - x f(x) \equiv 1$.

128. $f(x) = x^2 + x(1 - \ln x)$; $x^2 f'''(x) \equiv 1$.

129. $f(x) = x \ln \frac{x}{x + 1}$; $x^3 f''(x) \equiv [x f'(x) - f(x)]^2$.

130. $f(x) = e^{2x}(1 + x) + x^2 + 2x$; $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \equiv 4x^2$. – 6,

Utilizînd rezultatele de la § 8, nr. 2, să se rezolve exercițiile de mai jos (131—138):

131. Care este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = 2$ pentru polinomul $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

132. Să se arate că polinomul:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$$

este divizibil cu $(x + 1)^4$.

133. Să se arate că polinoamele:

$$P_1(x) = x^{n+1} - (n + 1)x + n \text{ și } P_2(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$$

au ca divizor comun pe $(x - 1)^2$.

134. Să se arate că polinomul:

$$P(x) = (1 - n^2)x^{n+1} + (n + 1)^2 x^n - (n + 1)^2 x + n^2 - 1$$

este divizibil cu $(x - 1)^3$.

135. Să se determine a și b astfel încît polinomul:

$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$$

să fie divizibil cu $(x - 1)^2$.

136. Să se determine a astfel încît polinomul:

$$P(x) = x^3 - 3x + a$$

să admită o rădăcină dublă.

137. Să se determine a astfel încît polinomul:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8a$$

să admită o rădăcină dublă.

138. Să se determine a, b, c astfel încît polinomul:

$$P(x) = (x + 1)^5 + a(x + 1)^3 + bx + c$$

să fie divizibil cu $(x - 1)^3$.

139. * Legea de mișcare a unui mobil de masă 3 kg fiind $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$, să se calculeze viteza, accelerația și energia cinetică a mobilului în momentul $t = 3$.

140. Legea de mișcare a unui mobil fiind $s(t) = \alpha t^2 + bt + 5$, să se determine α și b știind că în momentul $t = 2$ viteza mobilului este de 4 m/s, iar accelerația sa este de 3 m/s^2.

---

* În problemele următoare spațiile sînt măsurate în metri, iar timpul în secunde.

141. Legea de mișcare a unui mobil fiind $s(t) = \alpha t^2 + bt - 2$, să se determine α și b știind că viteza inițială a mobilului este de 15 m/s, iar viteza la $t = 4$ este de 40 m/s.

142. Legea de mișcare a unui mobil fiind $s(t) = \alpha t^2 + bt + c$, să se determine α, b și c, știind că mobilul pleacă dintr-un punct A situat la o distanță $OA = 10$ m de origine și că în momentul $t = 2$ mobilul se află în punctul B, situat la distanța $OB = 6$ m de origine, avînd viteza de 6 m/s.

143. Să se determine durata căderii unui corp care cade liber * de la o înălțime de 120 m, precum și viteza cu care corpul ajunge pe pămînt.

144. De la ce înălțime cade liber un corp dacă durata căderii sale este de 5 secunde? Cu ce viteză ajunge corpul pe pămînt?

145. Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză inițială de 100 m/s. Să se determine:

1° durata ascensiunii;
2° înălțimea la care ajunge mobilul;
3° durata căderii;
4° viteza cu care ajunge pe pămînt.

146. Cu ce viteză inițială trebuie aruncat vertical în sus un corp pentru ca să ajungă la o înălțime de 150 m? Care este durata ascensiunii?

147. Într-un vas conținînd o soluție de nitrat de argint se introduc doi electrozi conectați la bornele unui acumulator. Măsurînd (în miligrame) cantitatea de argint $q(t)$ depusă la catod în t secunde, se constată că ea verifică relația $q(t) = \ln(1 + t)$. Știind că $q(t)$ este proporțională cu cantitatea de electricitate $Q(t)$ (măsurată în coulombi), să se determine intensitatea curentului electric care trece prin soluție la $t = 0$ și la $t = 2$ (coeficientul de proporționalitate este 1,118).

148. Printr-o rezistență de 100 ohmi trece un curent electric alternativ. Știind că la fiecare moment t, cantitatea de electricitate, $Q(t)$, scursă prin rezistență, este dată de relația $Q(t) = 3 \sin 2\pi t$ coulombi, să se determine tensiunea maximă la bornele rezistenței.

149. Se consideră o bară metalică neomogenă OA, de lungime 6 cm. Măsurînd (în grame) masa unei porțiuni oarecare OM a barei, de lungime x, se constată că ea verifică relația $m(x) = x + 2x^2$. Să se determine densitatea la mijlocul barei.

* Aici și în problemele care urmează, se presupune că mișcările au loc în vid.

CAPITOLUL X

STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

§ 1. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE

1. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie f o funcție definită pe un interval I.

Definiție. Se spune că un punct $a \in I$ este un punct de maxim (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a lui a în care funcția are valori mai mici decît în a (fig. 99) : $f(x) \leqslant f(a)$ pentru orice $x \in V$.

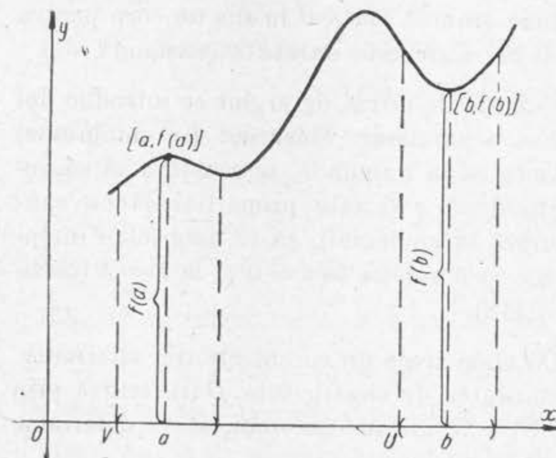


Fig. 99

Dacă a este un punct de maxim al lui f, numărul $f(a)$ se numește *maxim al lui f*, iar punctul $(a, f(a))$ de pe grafic se numește *punct de maxim al graficului.*

Definiție. Se spune că un punct $b \in I$ este un punct de minim (local) al funcției f dacă există o vecinătate U a lui b în care funcția are valori mai mari decît în b (fig. 99) :

$$f(b) \leqslant f(x),$$

pentru orice $x \in U$.

Dacă b este un punct de minim al lui f, numărul $f(b)$ se numește *minim al lui f*, iar punctul $(b, f(b))$ de pe grafic se numește *punct de minim al graficului.*

Atît punctele de maxim, cît și punctele de minim ale lui f se numesc *puncte de extrem* ale lui f. Valorile funcției în punctele sale de extrem (maxi-

mele şi minimele funcţiei) se numesc *extremele funcţiei*. Punctele de maxim şi de minim ale graficului se numesc *puncte de extrem* ale graficului.

Observaţii. 1° O funcţie poate avea într-un interval mai multe puncte de maxim şi de minim (fig. 99).

2°. O funcţie poate avea într-un punct a un maxim (local), fără a avea în a cea mai mare valoare din interval. Este posibil ca un maxim al funcţiei să fie mai mic decît un minim al funcţiei (fig. 99).

În legătură cu punctele de extrem, se demonstrează teorema următoare:

Teorema lui Fermat. *O funcţie f derivabilă pe un interval I are derivata nulă în orice punct de extrem din interiorul intervalului.*

Fie c un punct de maxim al funcţiei f aflat în interiorul intervalului I. Există, deci, o vecinătate V a lui c, astfel încît:

$$f(x) \leqslant f(c) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Să arătăm că derivata f' a lui f se anulează în c, adică

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

Dacă luăm $x < c$, atunci $x - c < 0$ şi, deoarece $f(x) - f(c) \leqslant 0$, $(x \in V)$, avem:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \qquad (x \in V).$$

Rezultă că şi limita raportului este pozitivă:

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

Dacă luăm $x > c$, atunci $x - c > 0$ şi, deci, raportul este negativ:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \qquad (x \in V).$$

Rezultă că şi limita raportului este negativă:

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

Din inegalităţile $f'(c) \geqslant 0$ şi $f'(c) \leqslant 0$ rezultă $f'(c) = 0$.

Dacă c este un punct de minim, demonstraţia se face în mod analog.

Interpretare geometrică. Deoarece $f'(c) = 0$, tangenta la grafic în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 100). Teorema lui Fermat afirmă, deci, că graficul unei funcţii derivabile are tangentă paralelă cu Ox în punctele sale de maxim sau de minim, care nu coincid cu extremităţile graficului.

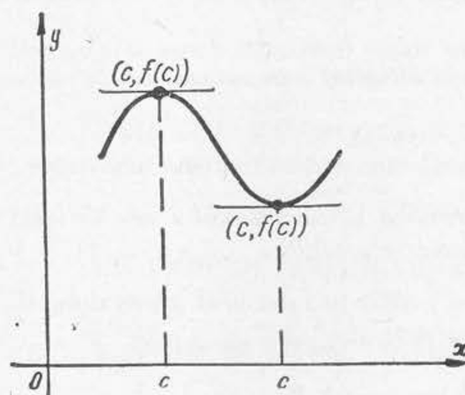


Fig. 100

Observaţii:

1° Teorema este adevărată şi dacă se presupune că f este derivabilă numai în punctele de extrem. Într-adevăr, în demonstraţie s-a folosit derivata lui f numai în aceste puncte.

2° Condiţia ca punctul de extrem, c, să fie în interiorul intervalului este *esenţială*. Dacă c este o extremitate a intervalului I, s-ar putea ca derivata să nu se anuleze în c.

De exemplu, pentru funcţia $f(x) = x$ definită pe $[0, 1]$ (fig. 101) avem $f'(x) = 1$ în orice punct, deci şi în punctul O în care funcţia are un minim şi în punctul 1 în care funcţia are un maxim.

3° Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată; s-ar putea ca derivata să se anuleze într-un punct c din interiorul lui I, fără ca c să fie un punct de maxim sau de minim (fig. 102). Asemenea puncte se numesc *puncte de inflexiune* (v. § 3).

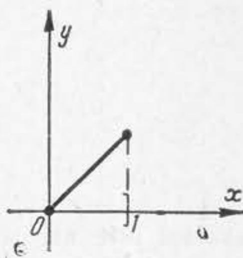


Fig. 101

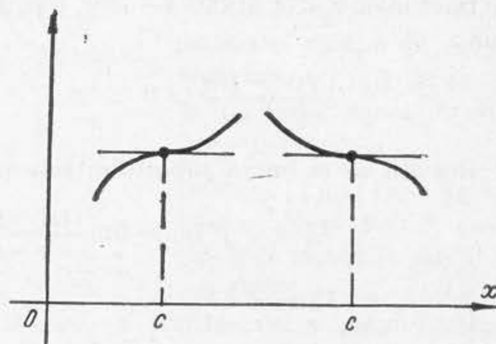


Fig. 102

2. Teorema lui Rolle

Teorema lui Rolle. Dacă f este o funcţie derivabilă pe un interval I şi dacă are valori egale $f(a) = f(b)$ în două puncte a şi b din I, $(a < b)$, atunci există cel puţin un punct c cuprins între a şi b $(a < c < b)$, în care derivata se anulează: $f'(c) = 0$.

Ipoteza afirmă că funcţia f are valori egale la extremităţile intervalului $[a, b]$, $f(a) = f(b)$. Putem găsi un interval $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ cu lungimea de două ori mai mică, astfel ca $f(a_1) = f(b_1)$.

Într-adevăr, să notăm cu h lungimea intervalului $[a, b]$; $\frac{h}{2}$ este jumătate din lungimea acestui interval. Se pot ivi două cazuri:

1) $f(a) = f\left(a + \frac{h}{2}\right) = f(b)$; în acest caz alegem ca interval $[a_1, b_1]$ unul dintre intervalele $\left[a, a + \frac{h}{2}\right]$ sau $\left[a + \frac{h}{2}, b\right]$, (fig. 103, a) şi avem $f(a_1) = f(b_1)$.

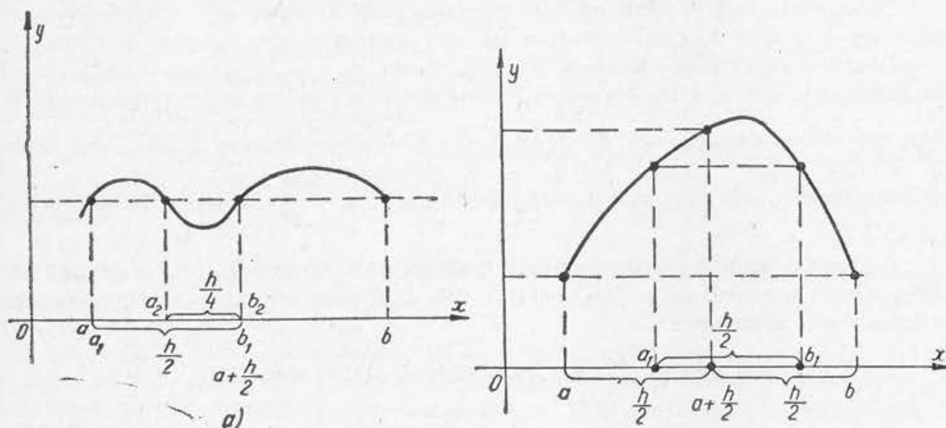


Fig. 103

2) $f(a) \neq f\left(a + \frac{h}{2}\right)$; în acest caz, considerînd funcţia

$$\varphi(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)$$

definită pentru $x \in \left[a, a + \frac{h}{2}\right]$ şi continuă pe acest interval, înlocuind pe x respectiv cu a şi cu $a + \frac{h}{2}$, obţinem:

$$\varphi(a) = f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f(a),$$

$$\varphi\left(a + \frac{h}{2}\right) = f(b) - f\left(a + \frac{h}{2}\right) = f(a) - f\left(a + \frac{h}{2}\right).$$

Numerele $\varphi(a)$ şi $\varphi\left(a + \frac{h}{2}\right)$ sînt de semne contrare, deci funcţia φ are valori de semne contrare la extremităţile intervalului $\left[a, a + \frac{h}{2}\right]$. Există atunci un punct a_1, $a < a_1 < a + \frac{h}{2}$, în care funcţia φ se anulează, $\varphi(a_1) = 0$, adică (fig. 103, b):

$$f(a_1) = f\left(a_1 + \frac{h}{2}\right).$$

Notînd $b_1 = a_1 + \dfrac{h}{2}$, intervalul $[a_1, b_1]$ are lungimea $\dfrac{h}{2}$ și $f(a_1) = f(b_1)$. Să observăm că în acest caz avem $a < a_1 < b_1 < b$.

Procedînd la fel, putem alege un interval $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ de lungime $\dfrac{h}{2^2}$, astfel că $f(a_2) = f(b_2)$. Să observăm că putem alege intervalul $[a_2, b_2]$ astfel încît nici una din extremitățile sale să nu coincidă cu cele ale intervalului inițial $[a, b]$, adică astfel ca $a < a_2 < b_2 < b$.

Într-adevăr, dacă la prima operație sîntem în cazul 2) după cum am observat mai sus, avem $a < a_1 < b_1 < b$, și deci cu atît mai mult $a < a_2 < b_2 < b$.

Dacă la a doua operație sîntem în cazul 2), atunci $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ și, deci, cu atît mai mult $a < a_2 < b_2 < b$. Dacă la ambele operații sîntem în cazul 1), alegem prima dată intervalul din stînga, deci $a = a_1 < b_1 < q$ $\left(\text{deoarece } b_1 = a + \dfrac{h}{2} < b\right)$ și a doua oară intervalul din dreapta, deci $a_1 < a_2 < b_2 = b$ $\left(\text{deoarece } a_1 < a_1 + \dfrac{h}{2^2} = a_2\right)$. Rezultă atunci $a < a_2 < b_2 < b$.

Continuînd indefinit această operație obținem un șir de intervale $[a_n, b_n]$ la extremitățile cărora funcția are valori egale. $f(a_n) = f(b_n)$. Cele două șiruri ale extremităților intervalelor cu proprietățile următoare:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$$

și

$$b_n - a_n = \frac{h}{2^n} \text{ (pentru orice } n).$$

Șirul (a_n) este crescător și mărginit, deci (v. cap. III, § 2) are o limită c:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Dar $b_n = (b_n - a_n) + a_n = \dfrac{h}{2^n} + a_n$, deci: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h}{2^n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 + c = c.$

Cele două șiruri au aceeași limită c, cuprinsă în fiecare din intervalele $[a_n, b_n]$, în particular în intervalul $[a_2, b_2]$. Din observația de mai sus rezultă că $a < c < b$. Mai mult, procedînd cu fiecare interval $[a_n, b_n]$ așa cum s-a procedat cu intervalul $[a, b]$, deducem că $a_n < c < b_n$, oricare ar fi n.

Funcția f este derivabilă în c; deoarece $a_n \to c$ și $b_n \to c$, avem

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c) - f(b_n)}{c - b_n}.$$

Rapoartele $\dfrac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}$ și $\dfrac{f(c) - f(b_n)}{c - b_n}$ au semne contrare, deoarece numărătorii sînt egali $(f(a_n) = f(b_n))$, iar numitorii au semne contrare $(a_n < c < b_n)$. Rezultă atunci, prin trecere la limită în inegalități, că $f'(c) = 0$ și teorema este demonstrată.

Interpretare geometrică (fig. 104). $f'(c)$ este coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcţiei în punctul $(c, f(c))$. Deoarece $f'(c) = 0$, tangenta este paralelă cu axa Ox.

Teorema lui Rolle afirmă, deci, că : *dacă funcţia f are valori egale la extremităţile unui interval* $[a, b]$, *există cel puţin un punct pe grafic în care tangenta este paralelă cu axa* Ox.

Caz particular. Dacă a şi b sînt rădăcini ale funcţiei, $f(a) = f(b) = 0$, teorema lui Rolle afirmă că între a şi b există cel puţin o rădăcină c a derivatei, $f'(c) = 0$. Am obţinut astfel următoarea

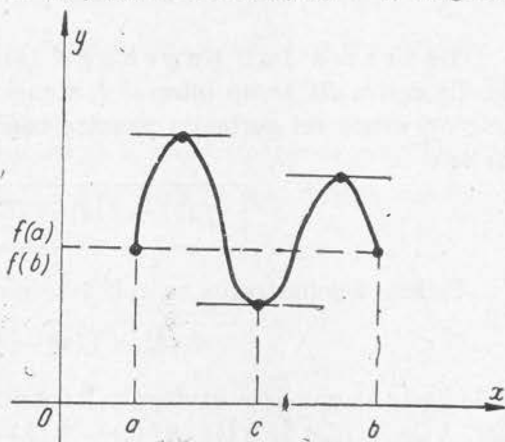


Fig. 104

Consecinţă. Între două rădăcini ale unei funcţii derivabile se află cel puţin o rădăcină a derivatei.

Observaţie. În demonstraţia teoremei nu s-a folosit derivata funcţiei f în punctele a şi b. Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă se presupune că f este derivabilă numai pe intervalul deschis (a, b), dar continuă pe intervalul închis $[a, b]$. Dacă aceste condiţii nu sînt verificate, concluzia teoremei lui Rolle poate să nu mai fie adevărată.

Exemple :

1) Funcţia $f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$ (fig. 105)

este derivabilă pe $(0, 1)$, ia valori egale la extremităţile intervalului $f(0) = f(1) = 0$, dar este discontinuă într-un punct din intervalul închis $[0, 1]$, şi anume în punctul 1. Derivata este $f'(x) \equiv 1$ pentru $0 < x < 1$, deci nu se anulează în nici un punct.

2) Funcţia $f(x) = |x|$ definită pe $[-1, 1]$ (fig. 106) este continuă pe intervalul închis $[-1, 1]$, ia valori egale la extremităţi dar nu este derivabilă în punctul 0. În celelalte puncte este derivabilă, şi anume :

$f'(x) = -1$, pentru $-1 \leqslant x < 0$,

$f'(x) = 1$, pentru $0 < x \leqslant 1$.

Această funcţie nu verifică teorema lui Rolle, căci derivata nu se anulează în nici un punct, fapt care se observă de la început, deoarece funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în tot intervalul $[-1, 1]$.

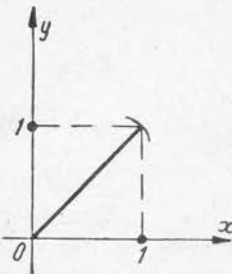


Fig. 105

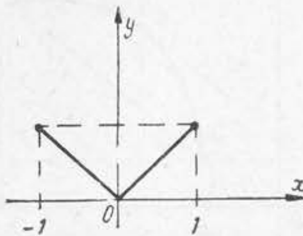


Fig. 106

3. Teorema creşterilor finite

Teorema lui Lagrange (sau a creşterilor finite). Dacă f este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci, oricare ar fi punctele a şi b din I, ($a < b$), există cel puţin un punct c cuprins între a şi b ($a < c < b$), astfel încît:

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)}$$

Pentru demonstraţie, se aplică teorema lui Rolle funcţiei

$$h(x) = f(x) - k(x - a),$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel ca să avem $h(a) = h(b)$. Dar, $h(a) = f(a)$ şi $h(b) = f(b) - k(b - a)$. Pentru a avea $h(a) = h(b)$, trebuie, deci, ca

$$f(a) = f(b) - k(b - a),$$

deci:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deoarece funcţiile $f(x)$ şi $(x - a)$ sînt derivabile pe I, urmează că şi h este derivabilă pe I şi, deoarece $h(a) = h(b)$, din teorema lui Rolle rezultă că între a şi b există cel puţin un punct c, ($a < c < b$), astfel ca $h'(c) = 0$.

Dar

$$h'(x) = f'(x) - k$$

şi deci

$$h'(c) = f'(c) - k = 0,$$

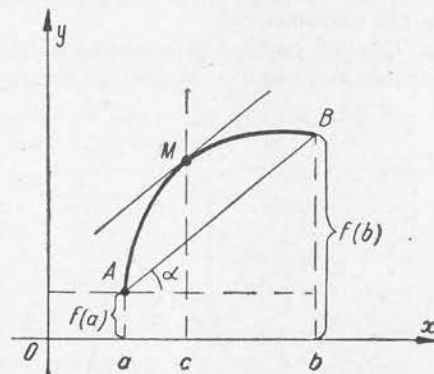


Fig. 107

sau $k = f'(c)$, adică

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

de unde

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Interpretarea geometrică (fig. 107). Coarda AB are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tangenta la grafic în punctul $M(c, f(c))$ are coeficientul unghiular $f'(c)$. Dar $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Teorema creșterilor finite afirmă, deci, că *există cel puțin un punct de pe grafic în care tangenta este paralelă cu coarda AB.*

Observații:

1° Ca și teorema lui Rolle, teorema creșterilor finite rămîne adevărată dacă se presupune că f este derivabilă numai pe intervalul deschis (a, b) dar continuă pe intervalul închis $[a, b]$.

2° Dacă $f(a) = f(b)$, atunci $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, deci $f'(c) = 0$. Teorema creșterilor finite conține, deci, ca un caz particular, teorema lui Rolle.

3° Fiecare din egalitățile

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \text{ și } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

poartă numele de „formula creșterilor finite" sau „formula mediei".

Exemplu: $f(x) = \sqrt{x}$. Avem $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ și $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

Există, deci, un punct c, $0 < c < 1$, în care tangenta are coeficientul unghiular 1 (paralelă cu prima bisectoare). Putem verifica acest rezultat direct, calculînd derivata $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ și punînd condiția $f'(x) = 1$, adică $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$. Se obține $x = \frac{1}{4}$ deci $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1$.

4. Consecințe ale teoremei creșterilor finite

Din teorema creșterilor finite rezultă unele proprietăți care permit, uneori, determinarea unei funcții atunci cînd se cunoaște derivata sa.

Se știe că derivata unei funcții constante este nulă. Reciproc:

1) **Dacă o funcție are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.**

Într-adevăr, fie f o funcție definită pe un interval I cu derivata nulă pe I, $f'(x) \equiv 0$. Să alegem un punct $a \in I$. Dacă x este un punct oarecare din I, aplicînd teorema creșterilor finite deducem că există un punct c cuprins între a și x, astfel încît

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(c).$$

Dar $f'(c) = 0$, deci $f(x) - f(a) = 0$ oricare ar fi $x \in I$, adică $f(x) \equiv f(a) = \text{const.}$

Observație. Dacă mulțimea pe care funcția are derivata nulă nu este un interval (ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte), este posibil ca funcția să nu fie constantă pe această mulțime.

Exemplu: Funcția f definită pe mulțimea $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in (0, 1) \\ 2, \text{ pentru } x \in (2, 3) \end{cases}$$

nu este constantă pe A, dar este derivabilă pe A și are derivata nulă.

Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe o mulțime A și dacă diferența lor este constantă, ele au aceeași derivată.

Într-adevăr, din $f - g = c$, deducem $f' - g' = 0$, deci $f' = g'$. Reciproc:

2) **Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I și dacă au derivatele egale $f' = g'$ atunci ele diferă printr-o constantă.**

Într-adevăr, dacă notăm $h = f - g$, avem $h' = f' - g' = 0$, deci, conform proprietății 1), $h = c$, adică $f - g = c$.

Observație. Dacă funcțiile f și g au derivate egale pe o mulțime care *nu* este interval, diferența $f - g$ poate să nu fie constantă.

Exemplu: Funcțiile f și g definite pe mulțimea $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ prin

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1, \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1, \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

au derivatele egale cu $\frac{1}{\cos^2 x}$, dar diferența lor nu este constantă pe A. Într-adevăr:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ +1, \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Din proprietatea 2) rezultă că, dacă f este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci *orice* funcție care are aceeași derivată ca și f se obține din f prin adăugarea unei constante C, adică este de forma $f + C$.

Exemple:

1) Dacă $f'(x) = 1$, atunci $f(x) = x + C$.

2) Dacă $f'(x) = x$, atunci $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$.

3) Să se găsească funcția f definită pe R, a cărei derivată este $f'(x) = 2x + 3$ astfel ca $f(0) = 1$.

Avem $f(x) = x^2 + 3x + C$; $f(0) = C$, deci $C = 1$.

Rezultă $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

5. Aplicații la mișcarea unui mobil

În capitolul IX, § 9, s-a arătat că, dacă mișcarea unui mobil este uniformă ($s(t) = \alpha t + b$), atunci viteza este constantă și accelerația nulă.

Reciproc, putem deduce acum că:

Dacă accelerația este nulă, viteza este constantă; iar dacă viteza este constantă, mișcarea este uniformă.

Într-adevăr, din $a(t) = 0$ deducem $v(t) = \alpha$, iar din $v(t) = \alpha$ deducem $s(t) = \alpha t + b$.

Așadar, *mișcarea unui mobil este uniformă dacă, și numai dacă, viteza sa este constantă (sau accelerația sa este nulă).*

În capitolul IX, § 9, s-a arătat de asemenea că dacă mișcarea este uniform accelerată ($v(t) = bt + c$), atunci accelerația este constantă:

$$a(t) = v'(t) = b.$$

Reciproc:

Dacă accelerația este constantă, mișcarea este uniform accelerată.

Într-adevăr, din $a(t) = b$ deducem $v(t) = bt + c$.

Așadar, *mișcarea este uniform accelerată dacă, și numai dacă, accelerația sa este constantă.*

Într-o mișcare uniform accelerată, legea de mișcare este de forma

$$s(t) = \alpha t^2 + bt + c.$$

Într-adevăr, din $v(t) = At + b$ deducem $s(t) = \frac{1}{2} At^2 + bt + c$ și, notînd $\alpha = \frac{1}{2} A$, obținem $s(t) = \alpha t^2 + bt + c$.

§ 2. ROLUL DERIVATEI DE ORDINUL ÎNTÎI ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

1. Intervale de monotonie ale unei funcții. Puncte de extrem

Din teorema creșterilor finite rezultă unele proprietăți care permit determinarea intervalelor de monotonie și a punctelor de extrem ale unei funcții.

Fie f o funcție derivabilă pe un interval I.

I) **Dacă derivata unei funcții este strict pozitivă pe intervalul I, atunci funcția este strict crescătoare pe I.**

Fie a și b puncte oarecare din I, $a < b$. Din teorema creșterilor finite rezultă că există un punct $c \in (a, b)$ astfel ca

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Dar $f'(c) > 0$ și $b - a > 0$, deci $f(b) - f(a) > 0$, adică $f(a) < f(b)$. Deoarece a și b au fost alese arbitrar în I, rezultă că oricare ar fi $x_1 < x_2$ din I avem $f(x_1) < f(x_2)$, adică f este strict crescătoare pe I.

Interpretare geometrică. Dacă derivata este strict pozitivă, tangenta la grafic formează cu axa Ox un unghi ascuțit $\left(\text{mai mic decît } \frac{\pi}{2}\right)$. Proprietatea I afirmă, deci, că dacă tangenta în orice punct al graficului formează un unghi ascuțit cu axa Ox, atunci funcția este strict crescătoare (fig. 108).

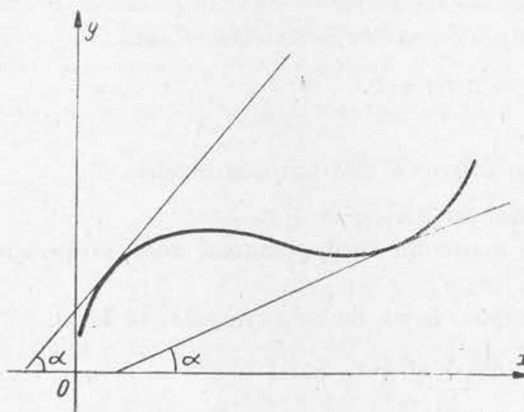


Fig. 108

II) **Dacă derivata unei funcții este strict negativă pe intervalul I, atunci funcția este strict descrescătoare pe I.**

Demonstrația se face ca mai sus.

Interpretare geometrică. Dacă derivata este strict negativă, tangenta la grafic formează cu axa Ox un unghi obtuz $\left(\text{mai mare decît } \frac{\pi}{2}\right)$. Proprietatea II afirmă, deci, că dacă tangenta în orice punct al graficului formează un unghi obtuz cu axa Ox, atunci funcția este strict descrescătoare (fig. 109.)

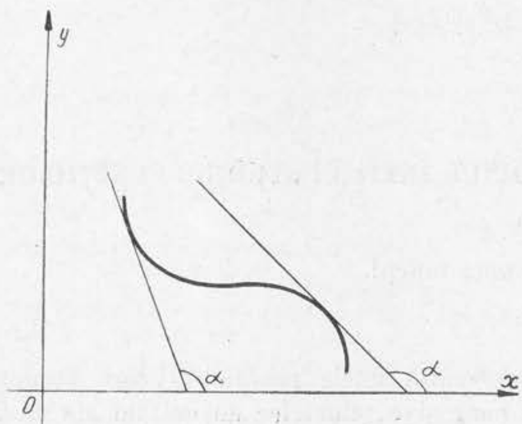


Fig. 109

Cele două proprietăți de mai sus afirmă că o funcție derivabilă este strict monotonă pe aceleași intervale pe care derivata sa păstrează un semn constant.

Problema determinării intervalelor de monotonie ale unei funcţii derivabile se reduce, deci, la aceea a determinării intervalelor pe care derivata sa păstrează acelaşi semn.

Toate funcţiile care vor fi întîlnite mai departe au derivata *continuă*, deci intervalele maxime pe care derivata păstrează acelaşi semn se determină cu ajutorul rădăcinilor reale ale derivatei (v. cap. VIII, § 3).

De aici rezultă calea de urmat pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcţii derivabile f:

se calculează derivata sa f';

se află rădăcinile reale ale derivatei;

se determină intervalele pe care derivata păstrează acelaşi semn;

după cum semnul derivatei este + sau —, se stabileşte dacă funcţia f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe aceste intervale.

Rezultă apoi şi punctele de extrem ale funcţiei :

dacă la stînga unui punct c din domeniul de definiţie funcţia este strict descrescătoare şi la dreapta lui c funcţia este strict crescătoare, atunci c este un punct de minim;

dacă la stînga lui c funcţia este strict crescătoare şi la dreapta lui c este strict descrescătoare, atunci c este un punct de maxim.

Ultimele două rezultate se formulează cu ajutorul derivatelor astfel :

Fie c un punct *din domeniul de definiţie al unei funcţii derivabile.*

III) **Dacă derivata este strict negativă la stînga lui c şi strict pozitivă la dreapta lui c, atunci c este un punct de minim al funcţiei.**

Dacă derivata este strict pozitivă la stînga lui c şi strict negativă la dreapta lui c, atunci c este un punct de maxim al funcţiei.

În particular, dacă funcţia este derivabilă în c, atunci derivata se anulează în c (v. teorema lui Fermat).

Dacă derivata are acelaşi semn de o parte şi de alta a lui c, atunci c nu este punct de extrem al funcţiei.

Aplicaţii la mişcarea unui mobil

Dacă viteza $v(t)$ a unui mobil este *strict pozitivă*, funcţia $s(t)$ este *strict crescătoare*, deci mobilul se deplasează în *sensul pozitiv* al axei Ox.

Dacă viteza $v(t)$ este *strict negativă*, funcţia $s(t)$ este *strict descrescătoare*, deci mobilul se deplasează în *sensul negativ* al axei Ox.

2. **Exemple**

1) Fie funcția $f(x) = x^2$ definită pe R. Derivata sa este $f'(x) = 2x$ și are o singură rădăcină, $x = 0$. Pentru $x = -1 < 0$ avem $f'(-1) = -2 < 0$ deci pe semidreapta $(-\infty, 0)$ derivata este strict negativă; pentru $x = 1 > 0$ avem $f'(1) = 2 > 0$, deci pe semidreapta $(0, +\infty)$ derivata este strict pozitivă. Punctul 0 este un punct de minim al funcției și $f(0) = 0$.

Aceste rezultate se trec într-un tablou:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- \ -$	0	$+ \ +$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	m (0)	↗	$+\infty$

În ultima rubrică s-a indicat printr-o săgeată descendentă (↘) faptul că funcția este strict descrescătoare și printr-o săgeată ascendentă (↗) faptul că funcția este strict crescătoare.

În dreptul rădăcinii 0 a derivatei s-a indicat prin litera m faptul că 0 este un minim al funcției, iar în paranteză, sub m, s-a trecut minimul funcției, $f(0) = 0$. În dreptul lui $-\infty$ și al lui $+\infty$ din rubrica întîi, au fost scrise în rubrica a treia limitele funcției în aceste puncte:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

Acest tablou este suficient pentru a trasa graficul funcției (fig. 110). Deoarece derivata se anulează în punctul de minim, tangenta la grafic în punctul (0, 0) este paralelă cu axa Ox (în fapt, este chiar axa Ox).

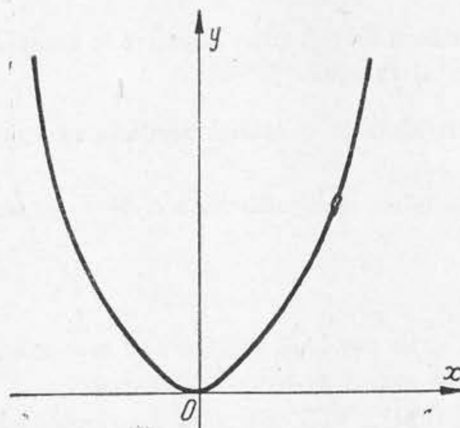


Fig. 110

2) Fie funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ definită pe R.

După cum se știe din clasa a IX-a, această funcție are un extrem pentru $x = -\frac{b}{2a}$, și anume un maxim dacă $a < 0$, sau un minim dacă $a > 0$. Vom regăsi aceste rezultate folosind metoda generală expusă la nr. 1.

Derivata funcției este $f'(x) = 2ax + b$ și are o singură rădăcină, $x = -\frac{b}{2a}$, iar $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Putem forma următoarele două tablouri, după cum $a < 0$ sau $a > 0$:

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

În acest caz, pentru $-\frac{b}{2a}$ funcția are un maxim (indicat în tablou prin litera M), care este $\frac{4ac - b^2}{4a}$ scris în paranteză sub M).

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

În acest caz, pentru $-\frac{b}{2a}$ funcția are un minim.

3) Fie funcția $f(x) = x^3 - 3x$ definită pe R. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$. Derivata are rădăcinile -1 și 1, $f'(-1) = f'(1) = 0$. Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Pentru determinarea semnului derivatei, se calculează valoarea sa în cîte un punct al fiecărui interval (de exemplu, $f'(-2) = 9$, $f'(0) = -3$, $f'(2) = 9$), sau se aplică regula semnului trinomului.

Avem $f(-1) = 2$ și $f(1) = -2$. Putem forma următorul tablou:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M (2)	$\searrow$	m (-2)		$+\infty$

Putem trasa acum graficul funcției (fig. 111).

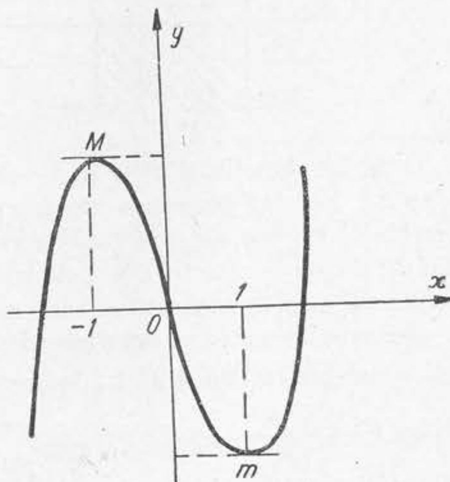


Fig. 111

Observație. În punctele de maxim și de minim, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox. Pentru a trasa mai precis graficul funcției în jurul acestor puncte, este bine ca după ce am fixat în plan punctele de extrem $(-1, 2)$ și $(1, -2)$ să ducem în aceste puncte cîte un mic segment de dreaptă paralel cu Ox.

4) Fie funcția $f(x) = e^x - x$ definită pe R.

Derivata sa este $f'(x) = e^x - 1$ și are o singură rădăcină, $x = 0$. Pentru $x = -1 < 0$ avem $f'(-1) = e^{-1} - 1 < 0$; pentru $x = 1 > 0$ avem $f'(1) = e^1 - 1 > 0$. Derivata este, deci, strict negativă pe $(-\infty, 0)$ și strict pozitivă pe $(0, \infty)$. Punctul 0 este punct de minim al funcției. Avem $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

Putem forma următorul tablou:

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		m (1)		↗	$+\infty$

Observație. Deoarece minimul funcției este strict pozitiv, funcția este strict pozitivă pe toată dreapta, adică $e^x - x > 0$, sau $e^x > x$. Acest rezultat a fost obținut anterior pentru $x \geqslant 1$ pe altă cale (v. cap. VII).

5) Fie funcția $f(x) = \ln x - x$ definită pe $(0, \infty)$. Derivata sa este $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ și are o singură rădăcină, $x = 1$. Se poate forma următorul tablou:

x	(hașurat)	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	(hașurat)		$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	(hașurat)	∞ -	↗		M (-1)	↘		$-\infty$

Deoarece funcția $f(x) = \ln x - x$ nu este definită pentru $x \leqslant 0$, în tablou s-a hașurat porțiunea corespunzătoare. Punctul 0 este extremitatea intervalului $(0, \infty)$ pe care funcția este definită, dar în 0 funcția nu este definită; de aceea punctul 0 a fost trecut în tablou în dreptul liniei verticale care separă partea hașurată de cea nehașurată.

Semnele derivatei se determină ca și în exemplul precedent, dînd derivatei o valoare la stînga lui 1 $\left(\text{de exemplu } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0\right)$ și o valoare la dreapta lui 1 $\left(\text{de exemplu } f'(2) = -\frac{1}{2} < 0\right)$. Punctul 1 este punct de maxim al funcției și $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$.

Observație. Deoarece maximul funcției este strict negativ, rezultă că funcția este strict negativă pe $(0, \infty)$, adică $\ln x - x < 0$, sau $\ln x < x$ pentru $x > 0$. Acest rezultat a fost obținut anterior (v. cap. VII) din inegalitatea $x < e^x$, $(x > 0)$, prin logaritmare.

§ 3. ROLUL DERIVATEI A DOUA ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

1. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune

În paragraful precedent s-a arătat că semnul primei derivate dă indicații cu privire la creșterea sau descreșterea funcției. De multe ori, aceste indicații nu sînt suficiente pentru trasarea graficului.

O funcție derivabilă poate fi strict crescătoare în două moduri (fig. 112), după cum tangenta la grafic se află deasupra graficului sau sub grafic. De asemenea, o funcție poate fi strict descrescătoare în două moduri (fig. 113) după poziția tangentei față de grafic.

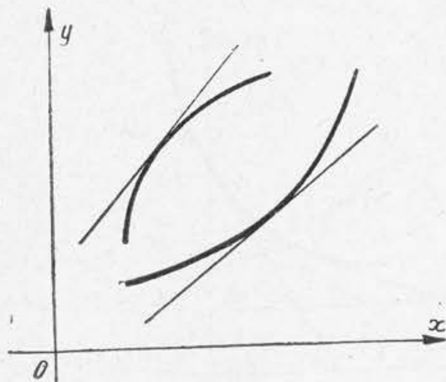


Fig. 112

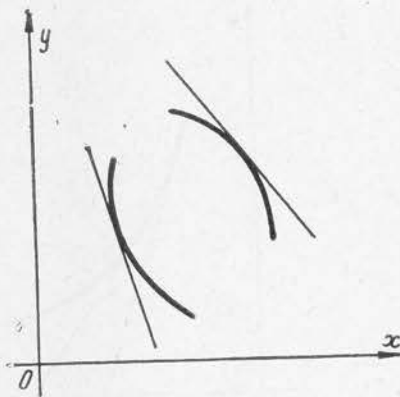


Fig. 113

Pentru a distinge diferitele poziții ale tangentei față de grafic s-a adoptat definiția următoare:

Definiție. *Fie f o funcție derivabilă pe un interval I.*

1) *Se spune că f este convexă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub grafic* (fig. 114).

2) *Se spune că f este concavă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află deasupra graficului* (fig. 115).

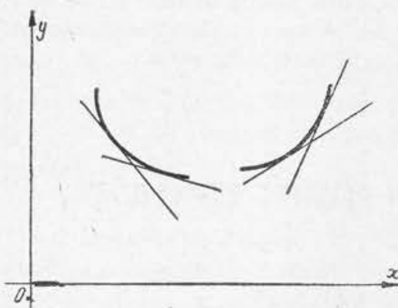


Fig. 114

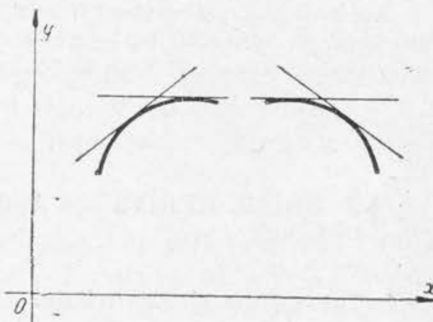


Fig. 115

Se spune că graficul unei funcții derivabile este o *curbă convexă* dacă funcția este convexă și că este o *curbă concavă* dacă funcția este concavă.

În figura 116 sînt reprezentate curbe convexe. Se vede că, luînd pe curbă puncte din ce în ce mai spre dreapta, tangenta formează cu axa Ox un *unghi din ce în ce mai mare* (deci coeficientul unghiular al *tangentei este din ce în ce mai mare*).

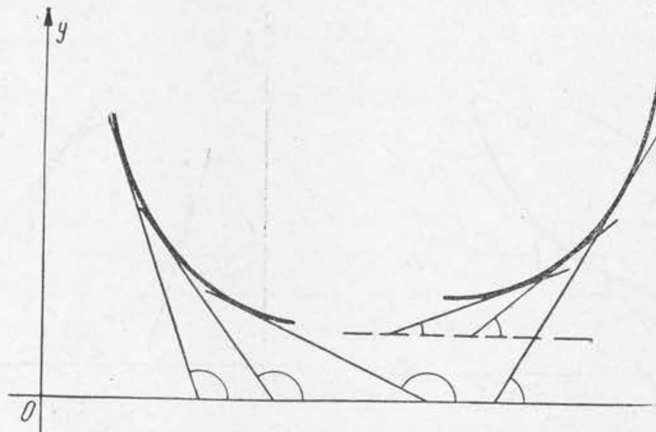


Fig. 116

În figura 117 sînt reprezentate curbe concave. Se vede că, luînd pe curbă puncte din ce în ce mai spre dreapta, coeficientul unghiular al tangentei este *din ce în ce mai mic.*

Semnul derivatei a doua dă indicații asupra convexității și concavității funcției.

Fie f o funcție derivabilă de două ori pe un interval I.

I) Dacă derivata a doua este strict pozitivă pe intervalul I, atunci funcția este convexă pe I.

II) Dacă derivata a doua este strict negativă pe intervalul I, atunci funcția este concavă pe I.

Demonstrația acestor proprietăți depășește cadrul manualului; de aceea dăm următoarea justificare geometrică:

Dacă derivata a doua f'' este strict pozitivă pe I, derivata întîi f' este strict crescătoare pe I. Deoarece derivata $f'(x)$ într-un punct $x \in I$ este egală cu coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \alpha$ al tangentei la grafic în punctul corespunzător $(x, f(x))$, rezultă că, dacă x crește, $f'(x)$ crește, deci unghiul α (format de tangenta la grafic cu axa Ox) crește de asemenea (fig. 116).

În acest caz, graficul se află mereu deasupra tangentei, deci graficul este o curbă convexă.

În cazul cînd derivata a doua este strict negativă, se procedează în mod analog (fig. 117).

Observație. Pentru a reține ușor că, dacă derivata a doua este strict pozitivă (+), funcția este convexă, să observăm că graficul unei funcții convexe seamănă cu o porțiune din secțiunea unui vas așezat cu deschizătura în sus, în așa fel încît să colecteze, să adune (+), un lichid ce s-ar turna în el.

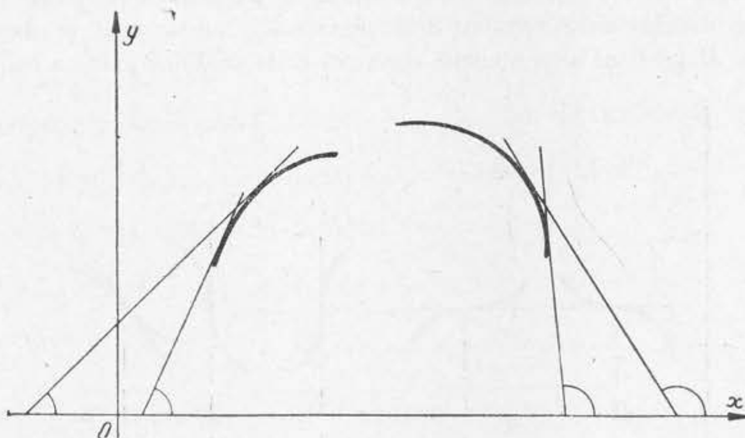


Fig. 117

Cele două proprietăți de mai sus afirmă că o funcție derivabilă de două ori este convexă sau concavă pe aceleași intervale pe care derivata a doua păstrează un semn constant.

Problema determinării intervalelor de convexitate sau de concavitate se reduce, deci, la aceea a determinării intervalelor pe care derivata a doua păstrează același semn.

Funcțiile care vor fi întîlnite mai departe au derivata a doua continuă, deci intervalele maxime pe care derivata a doua păstrează același semn se determină cu ajutorul rădăcinilor reale ale derivatei a doua (v. cap. VIII, § 3).

De aici rezultă calea de urmat pentru determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale unei funcții f derivabile de două ori:

se calculează derivata a doua f'';

se află rădăcinile reale ale derivatei a doua;

se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn;

după cum semnul derivatei a doua este $+$ sau $-$, se stabilește dacă funcția f este convexă sau concavă pe aceste intervale.

Uneori, semnul derivatei a doua este de asemenea util pentru a stabili dacă un punct de extrem al funcției este un punct de maxim sau de minim:

III) **Dacă într-un punct de extrem, c, avem $f''(c) > 0$, atunci c este un punct de minim, iar dacă avem $f''(c) < 0$, atunci c este un punct de maxim.**

Într-adevăr, dacă $f''(c) > 0$, tangenta la grafic în punctul $(c, f(c))$ se află sub grafic, deci c este un punct de minim, iar dacă $f''(c) < 0$, tangenta la grafic se află deasupra graficului, deci c este un punct de maxim (fig. 115).

Un punct $M(a, f(a))$ al graficului unei funcții se numește *punct de inflexiune* al graficului dacă graficul *are tangentă* în acest punct și dacă de o parte a lui M graficul este o curbă convexă și de cealaltă parte a lui M gra-

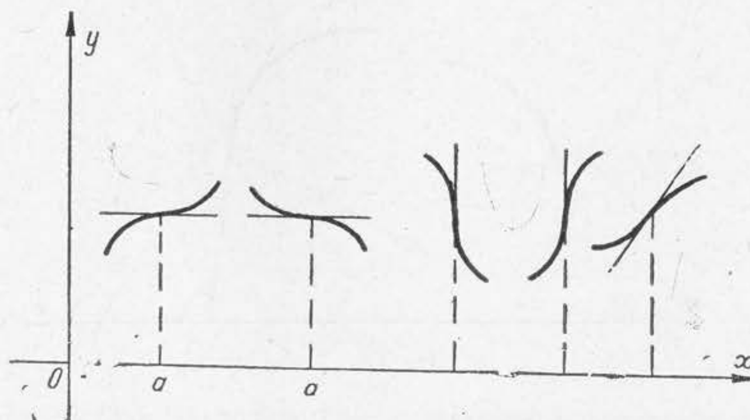


Fig. 118

ficul este o curbă concavă. Abscisa a a punctului M se numește punct de inflexiune pentru funcție (fig. 118). Așadar, un punct de inflexiune al funcției este un punct de extrem al derivatei de ordinul întîi.

Dacă M este un punct de inflexiune, atunci tangenta în M traversează graficul, deoarece de o parte a punctului M tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui M tangenta se află deasupra graficului.

Din cele două proprietăți de mai sus rezultă, încă, următoarea proprietate:

Fie c un punct din domeniul de definiție al unei funcții de două ori derivabilă.

IV) Dacă derivata a doua este strict pozitivă de o parte a unui punct c și strict negativă de cealaltă parte a lui c, și dacă graficul are tangentă în punctul corespunzător $(c, f(c))$, atunci c este un punct de inflexiune.

În particular, dacă f este derivabilă de două ori în c, atunci $f''(c) = 0$.

Dacă derivata a doua are același semn de o parte și de alta a lui c, atunci c nu este punct de inflexiune.

2. Exemple

1) Fie funcția $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, +\infty]$.

Derivata întîi este $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; nu se anulează; este strict pozitivă pe $(0, +\infty)$.

Derivata a doua este $f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; nu se anulează; este strict negativă pe $(0, +\infty)$, deci funcția este concavă. Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$.

Putem forma următorul tablou:

x		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		|	+	+	+	
(fx)		0	↗	1	↗	$+\infty$
$(f''x)$		|	−	−	−	

Putem trasa acum graficul (fig. 119). Pentru a mai obține un punct al graficului s-a trecut în tablou și valoarea 1 a argumentului x. Deoarece funcția nu este derivabilă în 0, s-a tras o linie verticală pe rubrica a doua și rubrica a patra, în dreptul valorii 0 a lui x.

Să observăm că numai cu indicațiile date de derivata întîi nu am fi reușit să decidem dacă graficul funcției f este cel trasat continuu sau cel trasat punctat (fig. 119).

2) Fie funcția $f(x) = x^{2n}$ (n natural) definită pe $(-\infty, +\infty)$. Derivatele sînt:

$$f'(x) = 2nx^{2n-1}$$

$$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$$

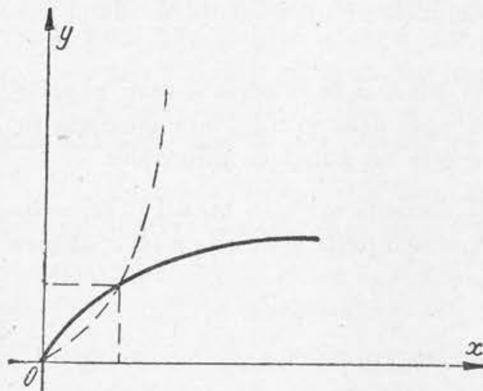


Fig. 119

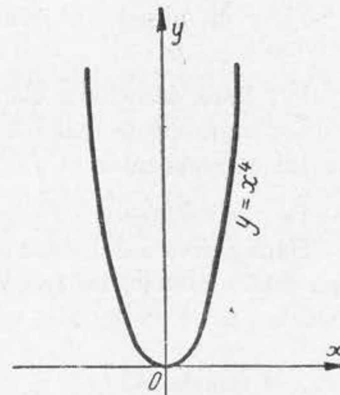


Fig. 120

Derivatele f' și f'' au o singură rădăcină, 0. Putem forma următorul tablou:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- -$	0	$+ +$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\overset{m}{(0)}$	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$+ +$	0	$+ +$	

Punctul 0 este punct de minim. Funcția este convexă pe $(-\infty, +\infty)$. În figura 120 s-a trasat graficul funcției $f(x) = x^4$.

3) Fie funcția $f(x) = x^{2n+1}$ (n natural) definită pe $(-\infty, +\infty)$. Derivatele sînt:

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n}$$

$$f''(x) = (2n+1)2nx^{2n-1}.$$

Derivatele f' și f'' au o singură rădăcină, 0. Putem forma următorul tablou:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+ +$	0	$+ +$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
f''		$- -$	0	$+ +$	

Funcția este mereu crescătoare. La stînga lui 0 este concavă, la dreapta lui 0 este convexă; 0 este punct de inflexiune; tangenta în 0 este orizontală. În figura 121 a fost trasat graficul funcției $f(x) = x^3$.

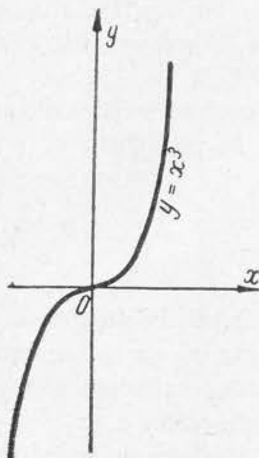


Fig. 121

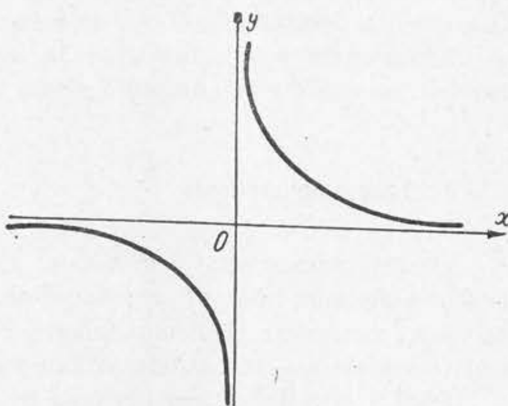


Fig. 122

4) Fie funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - (0)$. Derivatele sînt:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Tabloul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$- -$			$- -$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘		0
$f''(x)$	$- -$			$+ +$	

Se observă că în 0 funcția are limita la stînga $f(0-0) = -\infty$ și limita la dreapta $f(0+0) = +\infty$. În dreptul lui 0 am tras o linie verticală, pentru a indica faptul că funcția și derivatele sale nu sînt definite în 0. Graficul este trasat în figura 122 și este o hiperbolă.

Se observă că ramurile nemărginite ale curbei se apropie din ce în ce mai mult fie de axa Ox, fie de axa Oy. Spunem că Ox și Oy sînt *asimptote* ale curbei (v. paragraful următor).

Punctul 0 nu este punct de inflexiune, deoarece funcția nu este definită în acest punct (deși derivata a doua are semne diferite de o parte și de alta a lui 0).

§ 4. ASIMPTOTE

Pentru curbe care sînt nemărginite în plan (care nu pot fi cuprinse într-un dreptunghi), se pune problema dacă ramurile lor nemărginite se apropie necontenit de o dreaptă, într-un sens care va fi precizat mai jos. O asemenea dreaptă, dacă există, se numește *asimptotă*.

Asimptotele pot fi împărțite în două clase: asimptote verticale sau paralele cu axa Oy și asimptote oblice sau neparalele cu axa Oy.

1. Asimptote verticale

Dacă într-un anumit punct a cel puțin una din limitele la dreapta sau la stînga ale unei funcții $f(x)$ este infinită, atunci dreapta $x = a$ se numește *asimptotă verticală* a graficului funcției considerate. Pentru existența asimptotei verticale nu este nevoie ca funcția f să fie definită și în a.

Dacă f este definită și *continuă* în a, atunci limitele laterale în a sînt finite și egale cu $f(a)$, deci:

graficul nu are asimptotă verticală în punctele de continuitate ale funcției.

Pentru funcțiile pe care le întîlnim în mod obișnuit, punctele în care există asimptotă verticală pot fi ușor determinate. De exemplu, funcția $\operatorname{tg} x$ are asimptote verticale în punctele de forma $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg; funcția $\operatorname{ctg} x$ are asimptote verticale în punctele de forma $x = k\pi$, k întreg; funcția $\ln x$ are asimptotă verticală în $x = 0$; raportul $\frac{f}{g}$ a două funcții are asimptote verticale în punctele în care se anulează numitorul etc.

Exemple:

1) Pentru funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$, avem:

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

deci, în punctul $a = \frac{\pi}{2}$ graficul funcției are asimptotă verticală (fig. 123). De asemenea, în orice punct de forma $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ funcția tangentă are asimptotă verticală. Se observă că,

pe măsură ce x se apropie de $\frac{\pi}{2}$, graficul se apropie de asimptotă; mai precis, distanţa dintre grafic şi asimptotă, măsurată pe orizontală, tinde către 0 cînd x tinde către $\frac{\pi}{2}$.

2) Pentru funcţia $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), axa Oy este asimptotă verticală deoarece:

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty \text{ dacă } a > 1, \quad \text{(fig. 124)}$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty \text{ dacă } 0 < a < 1 \quad \text{(fig. 125).}$$

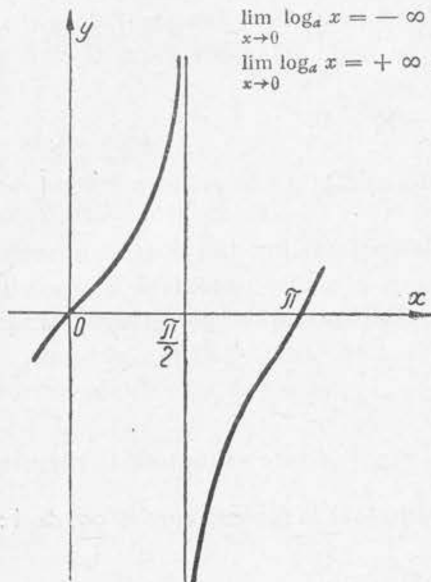


Fig. 123

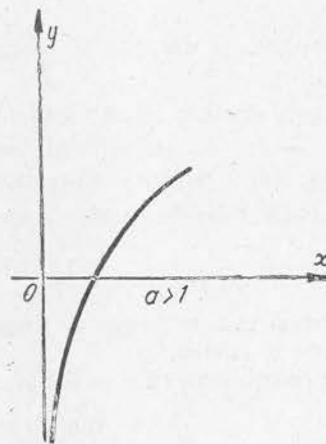


Fig. 124

3) Dacă $\alpha > 0$, **funcţia putere** $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ are ca asimptotă verticală axa Oy, deoarece $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ (fig. 126).

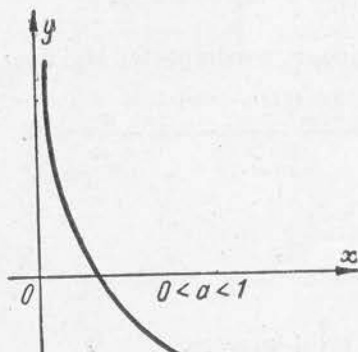


Fig. 125

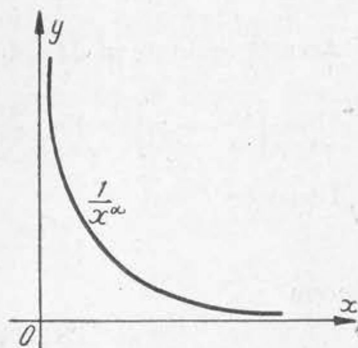


Fig. 126

2. Asimptote oblice

Fie f o funcție al cărei domeniu de definiție conține o semidreaptă (a, ∞). O dreaptă $y = mx + n$ este asimptotă oblică la graficul funcției f dacă distanța dintre dreaptă și grafic, măsurată pe verticală, tinde către 0 cînd x tinde către ∞.

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Se spune că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului.

În mod analog, dacă domeniul de definiție al funcției conține o semidreaptă $(-\infty, a)$, atunci o dreaptă $y = mx + n$ este asimptotă la graficul funcției f, dacă distanța dintre dreaptă și grafic măsurată pe verticală tinde către 0 cînd x tinde către $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

În acest caz, se spune că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $-\infty$ a curbei.

Să presupunem că $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$, deci:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0$$

și să găsim o legătură între funcția f și coeficienții m și n.

Avem:

$$f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n,$$

deci:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] + n = n.$$

Această egalitate ne dă ordonata la origine, n, a asimptotei. Mai departe:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]}{\lim\limits_{x \to +\infty} x} = \frac{n}{+\infty} = 0.$$

Deoarece

$$\frac{f(x)}{x} = \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] + m,$$

deducem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] + m = m.$$

Această egalitate ne dă panta m a asimptotei.

Așadar: pentru ca dreapta $y = mx + n$ să fie asimptotă, trebuie ca panta m și ordonata la origine n să verifice egalitățile:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

Reciproc, să presupunem că există limita *finită*:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

și limita *finită*:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0,$$

deci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă.

Așadar, rezultă următoarea regulă pentru determinarea asimptotei la ramura spre $+\infty$ a curbei:

se caută limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m;$$

dacă m este finit, se caută limita

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n;$$

dacă și n este finit, dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a curbei.

Observații. 1° Dacă cel puțin una dintre cele două limite nu există sau este infinită, curba nu are asimptotă la ramura spre $+\infty$.

2° Dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ și a este finit, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă, paralelă cu axa Ox (panta este $m = 0$ și ordonata la origine este $n = a$). Aceste drepte sînt numite *asimptote orizontale*.

Urmînd o cale analogă, obținem următoarea regulă pentru determinarea asimptotei la ramura spre $-\infty$ a curbei:

se caută limita

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m';$$

dacă m' este finit, se caută limita

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m'x] = n';$$

dacă și n este finit, dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă la ramura spre $-\infty$ a curbei.

15—968

Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ şi b este finit, atunci dreapta $y = b$ este asimptotă paralelă cu axa Ox.

Exemple:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ (v. § 3, fig. 122).

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0;\ n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0;\ n' = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m'x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Graficul funcţiei are asimptota orizontală $y = 0$ (axa Ox) (atît la ramura spre $+\infty$ cît şi la cea spre $-\infty$).

2) $f(x) = x^2$ (v. § 2, fig. 110).

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty.$$

Graficul funcţiei nu are asimptotă la ramura spre $+\infty$.

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

Graficul nu are asimptotă nici la ramura spre $-\infty$.

Graficul funcţiei x^2 este o parabolă. Rezultă că parabola nu are asimptote.

3) $f(x) = \sin x$.

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Dar $f(x) - mx = \sin x$, iar această funcţie nu are limită în punctul $+\infty$. Funcţia sinus nu are, deci, asimptotă la $+\infty$. La fel se arată că nu are asimptotă nici la $-\infty$.

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$ definită pe $R - \{1\}$.

Să stabilim mai întîi dacă dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală. Pentru aceasta calculăm limitele $f(1 - 0)$ şi $f(1 + 0)$. Avem:

$$f(1 - 0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = -\infty$$

$$f(1 + 0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = +\infty.$$

Aşadar dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală.

Să vedem dacă există asimptote oblice:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+2x+1}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3.$$

Dreapta $y = x + 3$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$.

Se calculează apoi $m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $n' = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m'x] = 3$.

Dreapta $y = x + 3$ este asimptotă şi la ramura spre $-\infty$.

Să studiem această funcţie şi să-i trasăm graficul. Derivata întîi este:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

Rădăcinile derivatei întîi sînt date de ecuaţia:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Găsim

$$x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2,$$

adică $x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$. Semnul derivatei coincide cu acela al numărătorului, deoarece numitorul este pozitiv.

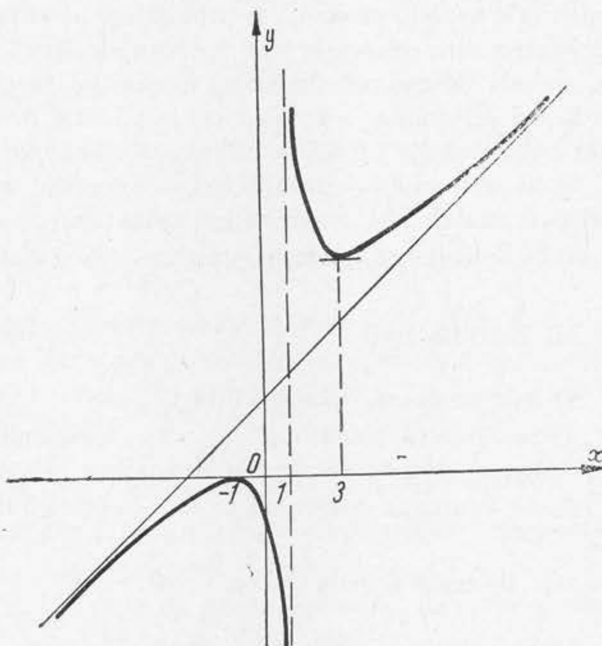


Fig. 127

Putem să ne dispensăm de derivata a doua şi să formăm tabloul următor:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+	0	—	|	—	0	+	
f	$-\infty \nearrow$		M (0)	$\searrow -\infty$	|	$+\infty \searrow$	m (8)		$\nearrow +\infty$

Pentru trasarea graficului, se desenează mai întîi asimptotele $x = 1$ şi $y = x + 3$ (fig. 127), apoi punctul de maxim al graficului $M(-1, 0)$ şi punctul de minim $m(3, 8)$. În aceste puncte, tangenta este paralelă cu axa Ox, deci trasăm cîte un mic segment orizontal. Se trasează apoi graficul, ţinînd seamă de indicaţiile din tablou.

§ 5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Pentru a construi graficul unei funcții este necesar să determinăm pe etape următoarele elemente :

I. Domeniul de definiție al funcției

1) De cele mai multe ori se întîlnesc funcții elementare. Dacă domeniul de definiție nu este precizat, se subînțelege că el este format din toate punctele pentru care operațiile prin care este definită funcția au sens; în acest caz, trebuie determinat domeniul maxim pe care poate fi definită funcția.

2) Se determină — dacă există — punctul în care graficul taie axa Oy, anume punctul $(0, f(0))$; se calculează, deci, $f(0)$.

3) Se determină — dacă există — punctele de forma $(x, 0)$ în care graficul taie axa Ox; se rezolvă, deci, ecuația $f(x) = 0$.

4) Se calculează, dacă există, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

II. Derivata întîi

1) Se calculează derivata întîi, f'.

2) Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. Rădăcinile acestei ecuații vor fi — eventual — puncte de maxim sau minim pentru funcție.

3) Se determină intervalele pe care derivata întîi păstrează semn constant.

III. Derivata a doua

1) Se calculează derivata a doua, f''.

2) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$. Rădăcinile acestei ecuații vor fie eventual puncte de inflexiune.

3) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează semn constant.

IV. Asimptote

1) *Asimptote verticale*

Se determină punctele a, pentru care una din limitele laterale, $f(a - 0)$ sau $f(a + 0)$, este infinită.

2) *Asimptote oblice*

Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ sau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, ($a$ finit), atunci dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$, respectiv la cea spre $-\infty$.

În caz contrar, se calculează $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\left(\text{respectiv } \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m'\right)$; dacă m (respectiv m') este finit, se calculează : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - m'x] = n'$. Dacă n (respectiv n') este finit, dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului (respectiv dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă la ramura spre $-\infty$ a graficului).

V. **Tabloul**

Într-un tablou cu rubrici orizontale se trec, pentru sistematizare, rezultatele obţinute mai sus :

în rubrica întîi se trec valorile remarcabile ale lui x obţinute anterior;

în rubrica a doua se trec valorile corespunzătoare ale derivatei întîi f', şi semnul lui f';

în rubrica a treia se trec valorile corespunzătoare ale funcţiei f, precum şi săgeţile ($\nearrow$ sau $\searrow$) care marchează creşterea sau descreşterea funcţiei;

în rubrica a patra se trec valorile derivatei a doua, f'', şi semnul lui f''.

VI. **Trasarea graficului**

Punctele remarcabile $(x, f(x))$, care rezultă din tablou, sînt reprezentate apoi în planul xOy. Se trasează asimptotele, dacă există.

Ţinînd seama de indicaţiile date de derivata întîi şi derivata a doua, se unesc punctele printr-o curbă.

Exemple

1) $f(x) = \frac{1}{x^{2n}}$ (n natural).

I. Domeniul de definiţie al funcţiei este $R - \{0\}$.

Graficul nu taie axa Oy, deoarece funcţia nu este definită în $x = 0$, şi nici axa Ox, deoarece $\frac{1}{x^{2n}} > 0$ pentru orice $x \neq 0$. Avem, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală, atît la ramura spre $+\infty$, cît şi la cea spre $-\infty$.

II. Derivata întîi : $f'(x) = -\frac{2n}{x^{2n+1}}$; nu se anulează. Pentru $x < 0$ $f'(x) > 0$, iar pentru $x > 0$, $f'(x) < 0$.

III. Derivata a doua : $f''(x) = \frac{2n(2n+1)}{x^{2(n+1)}}$; nu se anulează. Pentru orice $x \neq 0$, $f''(x) > 0$. (Funcţia este convexă pe tot domeniul său de definiţie.)

IV. Graficul are asimptota verticală $x = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Asimptota oblică (orizontală) a rezultat la I.

V. Tabloul :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+ + +$		$- - -$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0
f''		$+ + +$		$+ + +$	

VI. Graficul (fig. 128) este dat pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

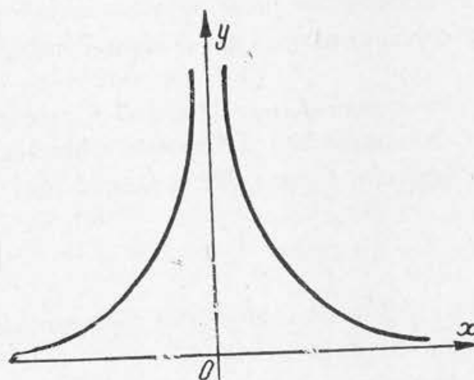


Fig. 128

Observaţie. Graficul funcţiei este simetric faţă de axa Oy deoarece, oricare ar fi $x \neq 0$, avem $f(-x) = \frac{1}{x^2}$ şi $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Funcţiile al căror domeniu I de definiţie este simetric faţă de origine şi care au proprietatea că $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$ se numesc *funcţii pare*. Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy. Este, deci, suficient să studiem comportarea unei funcţii pare numai pe porţiunea din dreapta originii, deoarece comportarea pe porţiunea din stînga originii rezultă prin simetrie faţă de Oy.

2 $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$.

I. Domeniul de definiţie este $R - \{0\}$.

Se observă imediat că graficul nu taie axele.

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală.

II. $f'(x) = -\frac{2n+1}{x^{2(n+1)}}$; nu se anulează. Pentru orice $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.

III. $f''(x) = \frac{2(2n+1)(n+1)}{x^{2n+3}}$; nu se anulează. Pentru $x < 0, f''(x) < 0$; iar pentru $x > 0$, $f''(x) > 0$.

IV. Graficul are asimptota verticală $x = 0$, deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.$$

Asimptota oblică (orizontală) a rezultat la I.

V. Tabloul:

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	$-$		$+$	$+$	

VI. Graficul (fig. 129) este dat pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Observație. Graficul funcției este simetric față de origine, deoarece, oricare ar fi $x \neq 0$, avem $f(-x) = -\frac{1}{x^3}$ și $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Funcțiile al căror domeniu de definiție I este simetric față de origine și care au proprietatea că $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in I$ se numesc *funcții impare*. Graficul unei funcții impare este simetric față de origine.

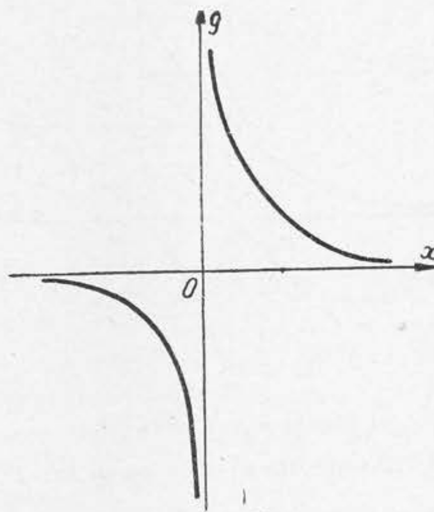


Fig. 129

3) *Funcția exponențială* $f(x) = a^x$, $a > 1$.

I. Domeniul de definiție este R.

Deoarece $a^x > 0$ pentru orice x, graficul funcției nu taie axa Ox.

Pentru $x = 0$ avem $f(0) = a^0 = 1$, deci în punctul $(0,1)$ graficul taie axa Oy.

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ (deoarece $a > 1$). Dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă la ramura spre $-\infty$.

II. Derivata întîi $f'(x) = a^x \ln a$. Avem $\ln a > 0$, deoarece $a > 1$, și $a^x > 0$. Rezultă că $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in R$.

III. Derivata a doua: $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ pentru orice $x \in R$.

IV. Nu există asimptote verticale, deoarece funcția este definită și continuă pe toată dreapta.

Avem $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$, deci nu există asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$.

Asimptota la ramura spre $-\infty$ este $y = 0$, după cum a rezultat la I.

V. Tabloul :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	+	+		+	+
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$
$f''(x)$	+	+		+	+

VI. Graficul (fig. 130).

Deoarece funcția $\log_a x$ este inversa funcției a^x, graficele celor două funcții sînt simetrice față de prima bisectoare. Am trasat, punctat (în fig. 130), și graficul funcției logaritmice. Pe grafic se poate citi imediat că :

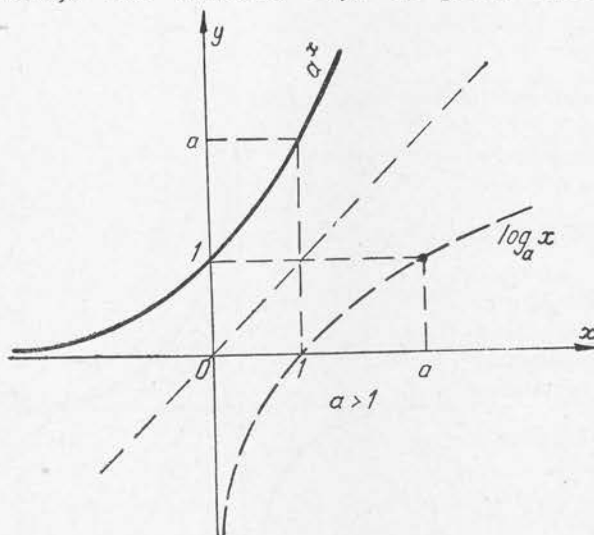


Fig. 130

dacă $0 < x < 1, \log_a x < 0$;

dacă $x > 1$, $\log_a x > 0$;

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

4) *Funcția exponențială* $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

I. Domeniul de definiție este R.

$a^x > 0$, pentru orice $x \in R$, deci graficul nu taie axa Ox; pentru $x = 0$, avem $a^0 = 1$, deci în punctul $(0, 1)$, graficul taie axa Oy.

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $(0 < a < 1)$. Dreapta $y = 0$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$.

II. Derivata întîi, $f'(x) = a^x \ln a$; deoarece $a < 1, \ln a < 0$, deci $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in R$.

III. Derivata a doua $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ pentru orice $x \in R$.

IV. Asimptote verticale nu există :

Avem $m' = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$, deci nu există asimptotă la ramura spre $-\infty$.

Ramura spre $+\infty$ are asimptota $y = 0$.

V. Tabloul :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−	−	−	−
f	$+\infty$	↘	1	↘	0
f''		+	+	+	+

VI. Graficul (fig. 131):

Am trasat punctat, în figura 131, și graficul funcției $\log_a x$, prin simetrie față de bisectoarea întîi. Pe graficul funcției logaritmice se pot citi următoarele proprietăți:

dacă $0 < x < 1$, $\log_a x > 0$;
dacă $x > 1$, $\log_a x < 0$;
$\log 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

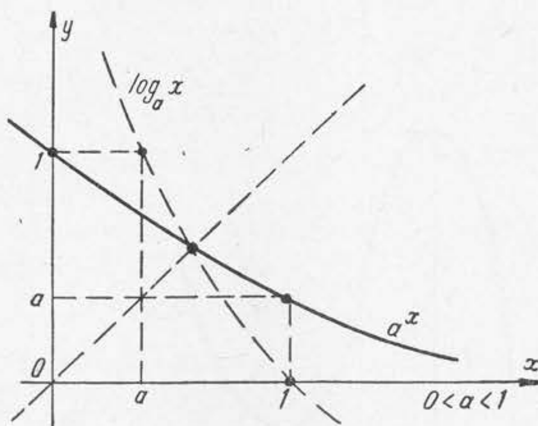


Fig. 131

5) $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

I. Domeniul de definiție este R.

Deoarece $f(0) = 2$, rezultă că graficul taie axa Oy (dreapta $x = 0$) în punctul (0,2). Rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt $x_1 = 1$ (se observă direct), $x_2 = x_1 = 1$, $x_3 = -2$; deci graficul taie axa Ox în punctele (1, 0) și (−2, 0).

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

II. $f'(x) = 3x^2 - 3$; are rădăcinile −1 și 1. Pentru $|x| < 1$, $f'(x) < 0$; iar pentru $|x| > 1$, $f'(x) > 0$ ($x = -1$ este punct de minim; $x = 1$ este punct de maxim).

III. $f''(x) = 6x$; are rădăcina $x = 0$. Pentru $x < 0$, $f''(x) < 0$, iar pentru $x > 0$, $f''(x) > 0$ ($x = 0$) este punct de inflexiune).

IV. Deoarece $f(x)$ este definită și continuă pe R, graficul său nu are asimptote verticale.

Deoarece

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty$$

și

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

rezultă că graficul nu are asimptote oblice.

V. Tabloul:

x	$-\infty$	-2		-1			0			1			$+\infty$
f'	+	+	+	0	−	−	−3	−	−	0	+	+	
f	$-\infty$ ↗	0	↗	M (4)		↘	i (2)		↘	m (0)		↗	$+\infty$
f''	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	

VI. Graficul (fig. 132).

În punctul de inflexiune (0, 2) al graficului, panta tangentei este $f'(0) = -3$; se trasează în acest punct o mică porțiune din tangentă.

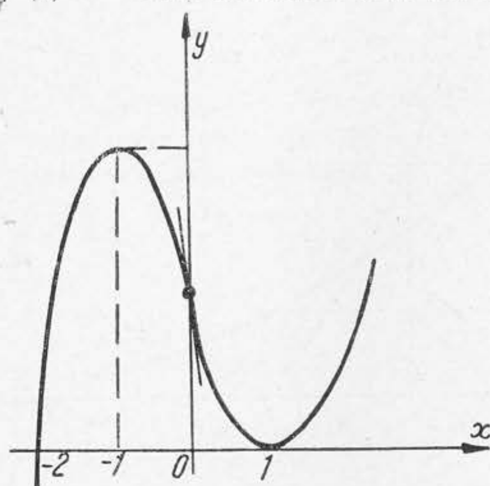


Fig. 132

6) $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$.

I. Domeniul de definiție este $R - \{-1, 1\}$.

Se observă ușor că singurul punct de intersecție al graficului cu axele este originea, (0,0).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

II. $f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$ are rădăcinile (reale)

$x_1 = -\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx -2$ și $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2$. Pentru $x_1 < x < x_2$, $f'(x) < 0$; iar pentru $x < x_1$ sau $x > x_2$, $f'(x) > 0$.

Obținem:

$$f(x_1) \approx -3 \text{ și } f(x_2) \approx 3.$$

III. $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ are rădăcina reală $x=0$. Studiul semnului lui $f''(x)$ este oarecum complicat de faptul că numitorul nu are semn constant. În astfel de cazuri e recomandabil să alcătuim un tablou separat pentru f''.

x	$-\infty$			-1		0		1			$+\infty$
$4x$		—	—	—	—	0	+	+	+	+	
$(x^2-1)^3$	+	+	+	0	—	—	—	0	+	+	
f''		—	—	|	+	0	—	|	+	+	

Observații:

1° Nu am introdus în tablou binomul $x^2 + 3$, deoarece, fiind pozitiv pentru orice x, nu influențează semnul lui $f''(x)$.

2° Punctul $x = 0$ este un punct de inflexiune. Punctele -1 și 1 nu sînt puncte de inflexiune, deoarece funcția nu este definită în aceste puncte.

IV. Se constată ușor că:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că dreptele $x = -1$ și $x = 1$ sînt asimptote verticale.

Obținem, de asemenea:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,$$

deci $m = m' = 1$.

Calculăm:

$$f(x) = mx = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1} - x = \frac{2x}{x^2-1};$$

deci

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0.$$

Deducem că dreapta $y = x$ este asimptotă oblică (atît pentru ramura spre $-\infty$ a graficului, cît și pentru cea spre $+\infty$).

V. Tabloul:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0		$+1$		$+\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
f'		$+\ +$	0	$-\ -$		$-$	-1	$-$		$-\ -$	0	$++$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	M (≈ -3)	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	i (0)	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	m (≈ 3)	$\nearrow$	$+\infty$
f''							0						

VI. Graficul (fig. 133).

În punctul de inflexiune (0, 0) al graficului, panta tangentei $f'(0) = -1$.

7) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$.

I. Domeniul de definiție este $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Graficul nu taie axa Oy, deoarece punctul $x = 0$ nu aparține domeniului de definiție al funcției. Ecuația $f(x) = 0$ are rădăcinile -1 și 1; deci graficul taie axa Ox în punctele $(-1, 0)$ și $(1,0)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

II. $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{(x^2-1)}}$ nu se anulează în domeniul de definiție al funcției. Pentru $x < -1$, $f'(x) < 0$; iar pentru $x > 1$, $f'(x) > 0$.

Observăm că

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f'(x) = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = \infty.$$

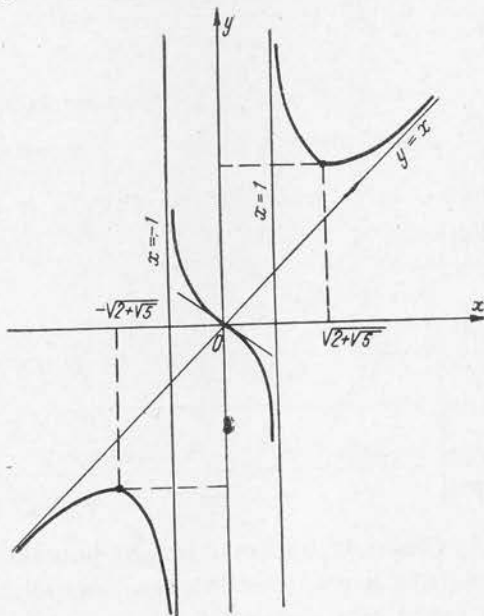


Fig. 133

III. $f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2-1)^3}}$ nu se anulează. Pentru orice x din domeniul de definiţie a lui f'', ($|x| > 1$) avem $f''(x) < 0$.

IV. Funcţia fiind continuă pe tot domeniul său de definiţie, graficul nu are asimptote verticale.

Să cercetăm dacă există asimptote oblice. Avem :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}}{2x}.$$

Deci :

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

şi :

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Obţinem :

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2-1} - x] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Un calcul analog ne conduce la $n' = 0$.

Deci dreapta $y = -\frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică pentru ramura spre $-\infty$ a graficului, iar dreapta $y = \frac{1}{2}x$ pentru ramura spre $+\infty$ a graficului.

V. Tabloul :

x	$-\infty$			-1		1			$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	$+$	$+$
f	$+\infty$	$-$	$-$	$-$ m (0)		m (0)		↗	$+\infty$
f''	$-$	$-$	$-$			$-$	$-$		$-$

Observăm (v. mai înainte punctul II) **că în punctul de minim $x = -1$ tangenta la grafic este verticală; la fel, în punctul de minim $x = 1$, tangenta la grafic este verticală.**

V. Graficul (fig. 134).

După cum am observat și la exemplul 1), funcția considerată mai înainte fiind pară, ne putem mărgini la studiul ramurii corespunzătoare intervalului $[1, +\infty]$.

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

I. Domeniul de definiție este R.

Se observă că graficul taie axele în origine: $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

II. $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; nu se anulează. Dacă $x < 0$, rezultă $\sqrt[3]{x}<0$, deci $f'(x) < 0$. Pentru $x > 0$, $f'(x) > 0$.

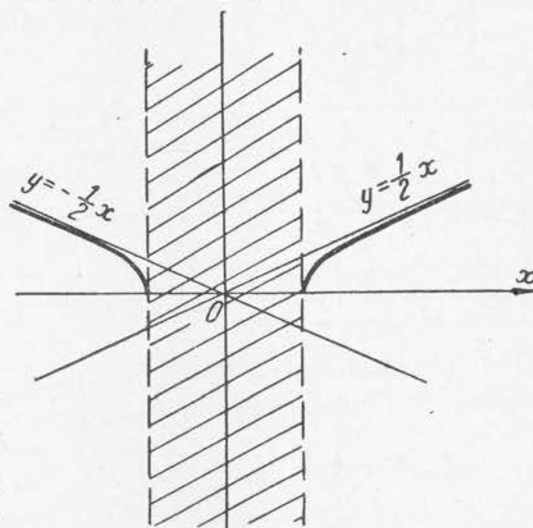


Fig. 134

Observăm că f este definită și continuă în punctul $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct. Într-adevăr:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

iar:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty.$$

În consecință, cele două ramuri ale graficului vor avea în punctul $x = 0$ semitangente verticale (suprapuse). Punctul $x = 0$ este *punct de întoarcere* al graficului (v. cap. IX, § 2).

III. $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ nu se anulează. Pentru orice $x \neq 0$, $\sqrt[3]{x^4} > 0$, deci $f''(x) < 0$.

IV. Funcția fiind definită și continuă pe R, graficul său nu admite asimptote verticale.

Deoarece $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, avem

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\ ;$$

deci $m = m' = 0$.

Dar, deoarece $f(x) - mx = \sqrt[3]{x^2}$, rezultă

$$n = n' = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

În concluzie, graficul nu are nici asimptote oblice.

V. Tabloul:

x	$-\infty$				0				$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			m (0)		$\nearrow$		$+\infty$
f''	$-$	$-$	$-$			$-$	$-$	$-$	

VI. Graficul (fig. 135).

9) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$.

I. Deoarece funcţia tg este periodică, de perioadă π, este suficient să studiem $f(x)$ într-un interval de lungime π. Observînd că funcţia f nu este definită în punctele în care funcţia tg nu este definită şi în punctele x pentru care $\operatorname{tg} x = -1$, rezultă că este suficient să considerăm pe f definită, de exemplu, pe $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

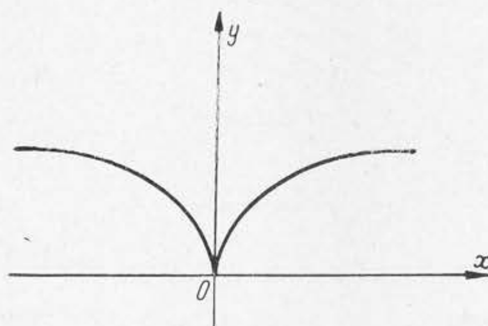


Fig. 135

Graficul taie axa Oy în punctul $(0,1)$, dar nu taie axa Ox, deoarece $f(x) \neq 0$ pentru orice x aparţinînd domeniului de definiţie al funcţiei.

II. $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \sin 2x}$ nu se anulează; $f'(x) < 0$ pentru orice x aparţinînd domeniului de definiţie.

III. $f''(x) = \dfrac{2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$ se anulează pentru $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Pentru $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, $f''(x) > 0$; iar pentru $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, $f''(x) < 0$.

(Se observă că f'' are semne contrare de o parte şi de alta a lui $x = \dfrac{3\pi}{4}$, dar în acest punct f'' nu este definită.)

IV. Cercetăm dacă f are limită în punctele în care nu este definită. Se observă uşor că

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Există puncte ale graficului în orice vecinătate a punctului $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, dar acest punct nu aparține graficului.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{4} \\ x < \frac{3\pi}{4}}} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{4} \\ x > \frac{3\pi}{4}}} f(x) = +\infty.$$

Deci dreapta $x = \frac{3\pi}{4}$ este asimptotă verticală.

V. Tabloul :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{4}$			π
f'	—	— —	—		-1	-1	—	—	—	—	
f	M (1)	↘	i $\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	0	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	m (1)
f''	+	+	0	—	—	—	—	—	+	+	

Observație :

Dacă se consideră funcția definită pe $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ ea are extreme în punctele $x = 0$, și $x = \pi$, dar derivata sa nu se anulează în aceste puncte (v. obs. 2 de la teorema lui Fermat). Dacă funcția se consideră definită pe o mulțime mai mare, ea nu mai are extreme în punctele 0 și π.

VI. Graficul (fig. 136).

10) $f(x) = e^{-x^2}$.

I. Domeniul de definiție este R. Deoarece funcția este pară, vom studia numai ramura corespunzătoare lui $x \geqslant 0$.

Graficul taie axa Oy în punctul (0, 1), dar nu taie axa Ox (deoarece $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} > 0$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală.

II. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ se anulează pentru $x = 0$, iar $f'(x) < 0$ pentru orice $x > 0$.

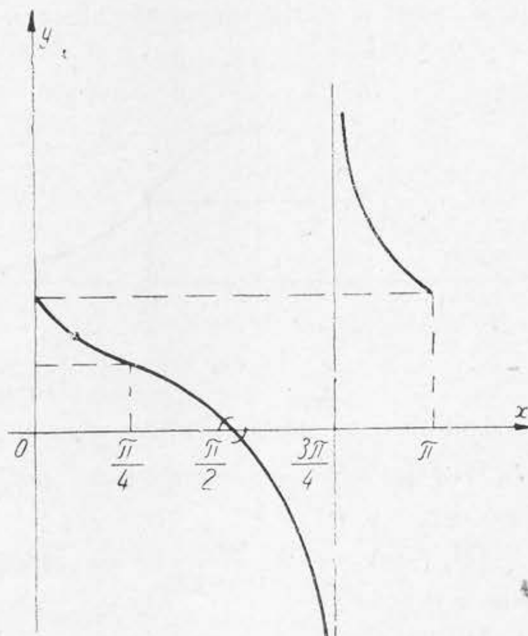


Fig. 136

III. $f''(x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$ are rădăcina (reală pozitivă) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pentru $0 \leqslant x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(x) < 0$; iar pentru $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(x) > 0$.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}6.$$

IV. Funcția fiind definită și continuă pe R, graficul său nu are asimptote verticale. Asimptota oblică a rezultat la I.

V. Tabloul:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'	0	$-$	$-$	$-$	$-$
f	1	$\searrow$	i $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\searrow$	0
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$

VI. Graficul (fig. 137).

Am completat graficul ducînd (punctat) simetrica față de axa Oy a ramurii obținute mai sus. Se observă că $(0, 1)$ este punctul de maxim al graficului.

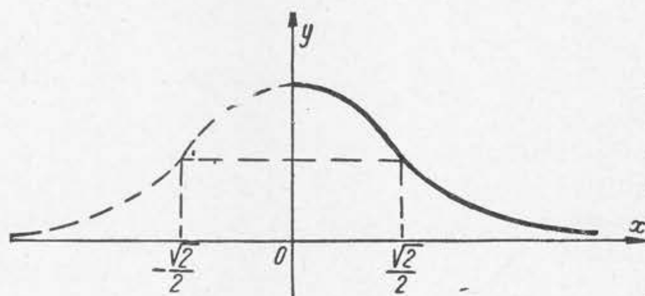


Fig. 137

11) $f(x) = \ln(1-x^2)$.

I. Domeniul de definiție este intervalul $(-1,1)$. Deoarece funcția este pară, va fi suficient să o studiem pe intervalul $[0,1]$.

Se constată ușor că graficul taie axele în punctul $(0,0)$.

Deoarece domeniul de definiție este mărginit, nu au sens limitele în punctele $+\infty$ și $-\infty$.

II. $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$; se anulează pentru $x = 0$. Pentru $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$.

III. $f''(x) = -2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; nu se anulează, iar $f''(x) < 0$ pentru orice x ($|x| \neq 1$).

IV. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală.

V. Tabloul :

x	0				1
f'	0	—	—	—	
f	M (0)		↘		$-\infty$
f''	—	—	—	—	

VI. Graficul (fig. 138).

12) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

I. Domeniul de definiţie este $(0, +\infty)$.

Graficul nu taie axele. Într-adevăr, funcţia nu este definită în punctul $x = 0$, iar $x^{\frac{1}{x}}$ nu se anulează pentru $x > 0$.

Să cercetăm limita la dreapta a lui $f(x)$ în $x = 0$ (limita la stînga nu are sens!) şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Obţinem :

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} x^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}}_{x>0} = 0^{+\infty} = 0.$$

Există puncte ale graficului în orice vecinătate a punctului (0,0), dar acest punct *nu* aparţine graficului.

Logaritmînd şi ţinînd seama de un rezultat obţinut în capitolul VII, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

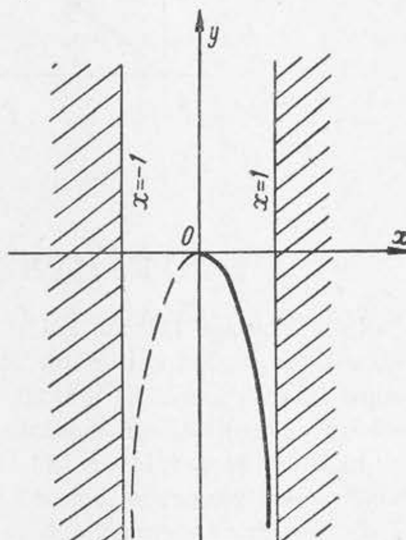


Fig. 138

adică $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotică orizontală.

II. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ se anulează pentru $x = e$.

Deoarece pentru orice $x > 0$, rezultă $x^{\frac{1}{x}-2} > 0$, deducem că, pentru $x < e$, $f'(x) > 0$, iar pentru $x > e$, $f'(x) < 0$.

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx (2,7)^{0,37} \approx 1,4.$$

III. Renunţăm la studiul derivatei a doua.

IV. Ţinînd seama de I, rezultă că $y = 1$ este unica asimptotă a graficului.

V. Tabloul:

x		0			e			$+\infty$
f'			+	+	0	—	—	
f		0	$\nearrow$		M $\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$		$\searrow$	1

VI. Graficul (fig. 139).

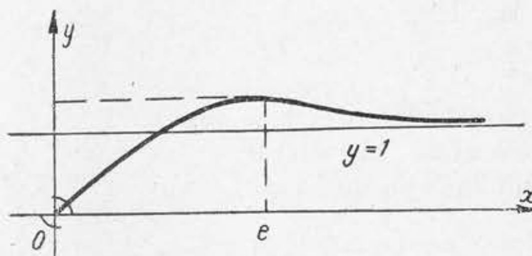


Fig. 139

§ 6. PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

În § 2 (propr. III) s-a arătat că semnul și rădăcinile derivatei întîi dau indicații asupra punctelor de extrem ale funcției. De asemenea, în § 3 (propr. III) s-a arătat că semnul derivatei a doua permite să stabilim rapid dacă un extrem este un maxim sau un minim.

În acest paragraf vom folosi aceste rezultate pentru rezolvarea unor probleme din geometrie, algebră și fizică.

1) *Care este dreptunghiul de perimetru dat, $4a$, care are cea mai mare arie?*

Să notăm cu x și y dimensiunile dreptunghiului:

$$2x + 2y = 4a$$

sau $x + y = 2a$, de unde $y = 2a - x$. Aria dreptunghiului este $S = xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax$. Aria S este o funcție de x și scriem:

$$S(x) = -x^2 + 2ax.$$

Să observăm că latura x a dreptunghiului este cuprinsă între 0 și semiperimetrul $2a$, $0 \leqslant x \leqslant 2a$, deci funcția $S(x)$ este definită pentru $x \in [0, 2a]$. (Pentru $x = 0$ și $x = 2a$, dreptunghiul are aria nulă). Pentru a găsi maximul acestei funcții, calculăm derivata:

$$S'(x) = -2x + 2a$$

și-i aflăm rădăcinile: $-2x + 2a = 0$, deci $x = a$.

Derivata a doua, $S''(x) = -2$, este strict negativă, deci $x = a$ este un punct de maxim al funcţiei $S(x)$. Aşadar, aria este maximă cînd $x = a$ şi $y = 2a - a = a$, adică atunci cînd laturile dreptunghiului sînt egale. Acest rezultat îl putem enunţa astfel:

Dintre toate dreptunghiurile care au acelaşi perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

Ţinînd seama de faptul că dimensiunile x şi y ale dreptunghiului sînt două numere pozitive, că aria dreptunghiului este produsul xy al acestor numere şi că suma lor este constantă, $x + y = 2a$, rezultatul precedent se poate enunţa astfel:

Produsul a două numere pozitive, a căror sumă este dată, este maxim cînd numerele sînt egale.

2) *Care este dreptunghiul de arie dată a^2, care are cel mai mic perimetru?*

Să notăm cu x şi y dimensiunile dreptunghiului:

$$xy = a^2,$$

de unde $y = \frac{a^2}{x}$. Perimetrul P al dreptunghiului este:

$$P = 2x + 2y = 2x + \frac{2a^2}{x}; \text{ scriem: } P(x) = 2x + \frac{2a^2}{x}.$$

Latura x a dreptunghiului este strict pozitivă şi poate fi oricît de mare $0 < x < +\infty$, deci funcţia $P(x)$ este definită pentru $x \in (0, +\infty)$. Pentru a găsi minimul acestei funcţii, calculăm derivata

$$P'(x) = 2 - \frac{2a^2}{x^2}$$

şi-i aflăm rădăcinile: $2 - \frac{2a^2}{x^2} = 0$, deci $x = a$.

Derivata a doua $P''(x) = \frac{4a^2}{x^3}$ este strict pozitivă (deoarece $x > 0$), deci $x = a$ este un minim al funcţiei P. Aşadar, perimetrul este minim cînd $x = a$ şi $y = \frac{a^2}{a} = a$, adică atunci cînd laturile dreptunghiului sînt egale.

Am obţinut astfel următorul rezultat:

Dintre toate dreptunghiurile care au aceeaşi arie, pătratul are perimetrul cel mai mic.

Ţinînd seama de faptul că x şi y sînt numere pozitive, că suma $x + y$ este jumătate din perimetrul dreptunghiului şi că produsul xy este constant, $xy = a^2$, rezultatul precedent se poate enunţa astfel:

Suma a două numere pozitive al căror produs este dat este minimă cînd numerele sînt egale.

3) *Să se determine conul cu cel mai mare volum înscris într-o sferă de rază R* (fig. 140).

Să notăm cu r şi h respectiv raza şi înălţimea conului. Volumul conului este:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Dar în triunghiul dreptunghic ABC, înălţimea r este medie proporţională între segmentele h şi $2R - h$, determinate de ea pe ipotenuză:

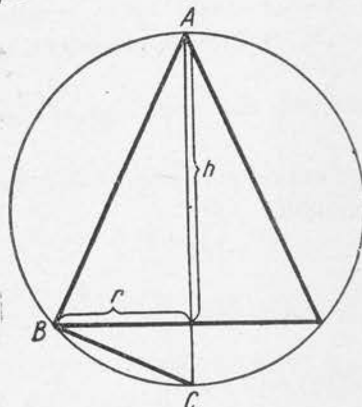


Fig. 140

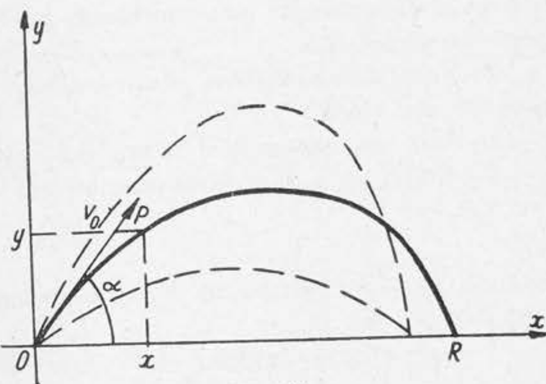


Fig. 141

$$r^2 = h(2R - h);$$

deci

$$V(h) = \frac{\pi}{3} h^2(2R - h).$$

Înălţimea h este cuprinsă între 0 şi $2R$, deci funcţia $V(h)$ este definită pentru $h \in [0,2R]$. Pentru a afla maximul acestei funcţii, calculăm derivata:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} h(4R - 3h)$$

şi-i aflăm rădăcinile: $\frac{\pi}{3} h(4R - 3h) = 0$; deci $h_1 = 0$ şi $h_2 = \frac{4R}{3}$. Derivata a doua, $V''(h) = \frac{\pi}{3}(4R - 6h)$, este strict pozitivă pentru $h_1 = 0$, deci 0 este un *punct de minim*, şi strict negativă pentru $h_2 = \frac{4}{3}R$, deci $\frac{4}{3}R$ este un *punct de maxim*.

Aşadar, conul cu volumul cel mai mare are înălţimea $h = \frac{4}{3}R$ şi raza $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$. Volumul său este

$$V = \frac{32\pi}{81}R^3.$$

4) *Să se determine sub ce unghi α faţă de orizontală trebuie aruncat un corp cu viteza iniţială v_0, astfel încît să atingă distanţa maximă R* (fig. 141).

Sub acţiunea forţei gravitaţiei, corpul descrie o parabolă * care taie orizontala în punctul R, dat de egalitatea:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Distanţa R este, deci, funcţie (depinde) de unghiul α, $R(\alpha)$; deoarece unghiul α este cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2}$, funcţia R este definită pentru $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pentru a afla maximul acestei funcţii, calculăm derivata:

$$R'(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

şi-i aflăm rădăcinile $\left(\text{cuprinse între } 0 \text{ şi } \frac{\pi}{2}\right)$: $\frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0$ sau $\cos 2\alpha = 0$, deci $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, de unde $\alpha = \frac{\pi}{4}\Big)$. Derivata a doua, $R''(\alpha) = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, este strict negativă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci şi în $\frac{\pi}{4}$; rezultă că $\frac{\pi}{4}$ este un maxim. Aşadar, pentru a realiza distanţa maximă, corpul trebuie aruncat sub un unghi de 45° faţă de orizontală.

5) După cum se ştie din fizică, *principiul lui Fermat* afirmă că, pentru a ajunge dintr-un punct într-altul, o rază de lumină se propagă după acea traiectorie pe care o parcurge în minimul de timp.

Fie AA' suprafaţa de separaţie a două medii omogene în care lumina se propagă cu vitezele v_1, respectiv v_2. Să se găsească traiectoria descrisă de o rază de lumină pentru a ajunge din punctul C în punctul D (fig. 142).

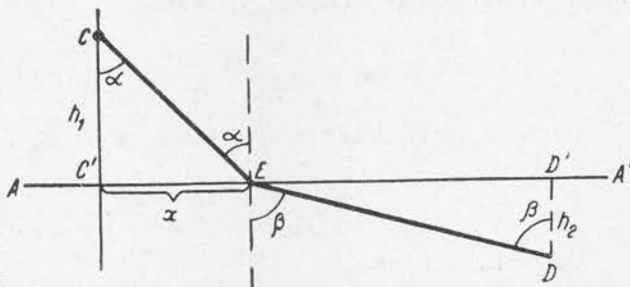


Fig. 142

* Ecuaţia traiectoriei este $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$.

Într-adevăr, fie (x, y) coordonatele punctului de pe traiectorie în care corpul a ajuns după t secunde. Proiecţia vitezei pe orizontală este $v_0 \cos\alpha$, iar pe verticală este $v_0 \sin\alpha$. Proiecţia corpului pe orizontală are o mişcare uniformă, $x = v_0 \cos\alpha t$; proiecţia pe verticală este influenţată şi de acţiunea gravitaţiei, $y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$. Eliminînd pe t, se obţine $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$. Punctele în care traiectoria atinge orizontala se obţin rezolvînd ecuaţia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$. Se obţin punctele 0 şi $R = \frac{2v_0^2}{g} \sin 2\alpha$.

Fie C' şi D' proiecţiile lui C şi D pe AA', $c = C'D'$, $h_1 = CC'$, $h_2 = DD'$, $x = C'E$. În fiecare din cele două medii omogene, lumina se propagă în linie dreaptă. În primul mediu, lumina se propagă cu viteza v_1 şi parcurge distanţa CE în timpul T_1; $CE = v_1 T_1$ sau

$$T_1 = \frac{CE}{v_1}.$$

În al doilea mediu, lumina se propagă cu viteza v_2 şi parcurge distanţa ED în timpul T_2; $ED = v_2 T_2$ sau :

$$T_2 = \frac{ED}{v_2}.$$

Timpul total este :

$$T = \frac{CE}{v_1} + \frac{ED}{v_2};$$

dar $CE = \sqrt{h_1^2 + x^2}$ şi $ED = \sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}$, deci

$$T = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}}{v^2}.$$

Timpul T este, deci, funcţie de x, $T(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant c)$. Pentru a afla minimul acestei funcţii, anulăm derivata :

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}} = 0.$$

Derivata se anulează pentru acele valori ale lui x pentru care

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}}.$$

Derivata a doua :

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1 \sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{h_2^2}{v_2 \sqrt{[h_2^2 + (c - x)^2]^3}}$$

este strict pozitivă pentru orice x, deci punctele de extrem ale funcţiei $T(x)$ sînt puncte de minim.

Dar $\sin \alpha = \frac{x}{CE} = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}$, iar $\sin \beta = \frac{c - x}{DE} = \frac{c - x}{\sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}}$

astfel încît egalitatea care dă punctele de minim se scrie :

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}}$$

Notînd cu c viteza luminii în vid, indicii de refracţie n_1 şi n_2 ai celor două medii sînt : $n_1 = \frac{c}{v_1}$, $n_2 = \frac{c}{v_2}$.

Relaţia obţinută mai sus se scrie :

$$\boxed{n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta}$$

şi constituie una din legile refracţiei, cunoscută din fizică.

§ 7. SEPARAREA RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAŢII

În acest paragraf este tratată problema *separării* rădăcinilor reale ale unei ecuaţii, adică a determinării unor intervale care să conţină — fiecare — doar cîte o rădăcină a ecuaţiei.

Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I.

Reamintim un rezultat obţinut în § 1 (consecinţa teoremei lui Rolle) :

I) *Între două rădăcini ale funcţiei se află cel puţin o rădăcină a derivatei.*

Două rădăcini x_1 şi x_2 ale derivatei se numesc *rădăcini consecutive*, dacă între x_1 şi x_2 nu se mai află nici o altă rădăcină a derivatei.

O proprietate simetrică cu proprietatea I este următoarea :

II) *Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.*

Fie $x_1 < x_2$ două rădăcini consecutive ale derivatei : $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Dacă funcţia ar avea între x_1 şi x_2 două rădăcini, a şi b, $(x_1 < a < b < x_2)$, atunci — conform proprietăţii precedente — între a şi b s-ar afla cel puţin încă o rădăcină a derivatei, deci x_1 şi x_2 n-ar mai fi rădăcini consecutive.

Se demonstrează în mod analog proprietăţile următoare :

III) *La stînga celei mai mici rădăcini a derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.*

La dreapta celei mai mari rădăcini a derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.

Din aceste proprietăţi rezultă că fiecare rădăcină a funcţiei se află cuprinsă între două rădăcini consecutive ale derivatei sau între o rădăcină a derivatei şi o extremitate a intervalului pe care este definită funcţia.

Aşadar, calea de urmat pentru separarea rădăcinilor reale ale unei funcţii derivabile pe un interval (a, b) este următoarea :

se calculează derivata f' ;

se află rădăcinile reale ale derivatei și, împreună cu extremitățile a și b, se așază în ordine crescătoare:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b;$$

se calculează limitele $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ care, pentru simplificarea scrisului, se notează respectiv cu $f(a)$ și $f(b)$;

se formează așa-numitul șir al lui Rolle:

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ f(b).$$

Dacă doi termeni consecutivi din acest șir au semne contrare, atunci între valorile corespunzătoare ale argumentului se află o rădăcină reală a funcției (v. cap. VIII), *și numai una* (conform propr. II și III).

Dacă doi termeni consecutivi din acest șir au același semn, între valorile corespunzătoare ale argumentului nu se află nici o rădăcină a funcției.

Într-adevăr, dacă, de exemplu, $f(x_i) > 0$ și $f(x_{i+1}) > 0$, deoarece între x_i și x_{i+1} derivata are același semn, funcția este strict monotonă pe $[x_i, x_{i+1}]$, deci nu se poate anula pe acest interval.

Observație. Dacă se trasează graficul funcției f, rădăcinile funcției sînt abscisele punctelor în care graficul taie axa Ox. În acest caz se pot separa ușor rădăcinile funcției.

Exemple:

1) *Fie ecuația* $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Prin derivare se obține $4x^3 - 4x = 0$. Rădăcinile derivatei sînt: $-1, 0, 1$.

Avem: $f(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 - 2x^2 - 3) = +\infty$;

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} (x^4 - 2x^2 - 3) = +\infty.$$

Formăm șirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Constatăm două schimbări de semn ale funcției $f(x)$, deci ecuația considerată are două rădăcini reale și anume: una în intervalul $(-\infty, -1)$ și una în intervalul $(1, +\infty)$. Celelalte două rădăcini sînt complexe.

Să trasăm graficul acestei funcții. Formăm următorul tablou:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m (-4)	$\nearrow$	M (-3)	$\searrow$	m (-4)	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcției este dat în figura 143. Graficul taie axa Ox în două puncte: x_1 și x_2, $x_1 < -1$ și $x_2 > 1$, deci și pe grafic se constată că ecuația $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ are două rădăcini reale.

Deoarece ecuația dată este o ecuație bipătrată, se verifică ușor că rădăcinile sale reale sînt $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$.

2) *Fie ecuația* $x^3 + 2x - 2 = 0$.

Prin derivare obținem ecuația $3x^2 + 2 = 0$, care nu are rădăcini reale. Formăm șirul lui Rolle.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Deducem că ecuația dată are o singură rădăcină reală.

Observăm că $f(0) = -2 < 0$ și $f(1) = 1 > 0$, deci rădăcina ecuației este cuprinsă între 0 și 1.

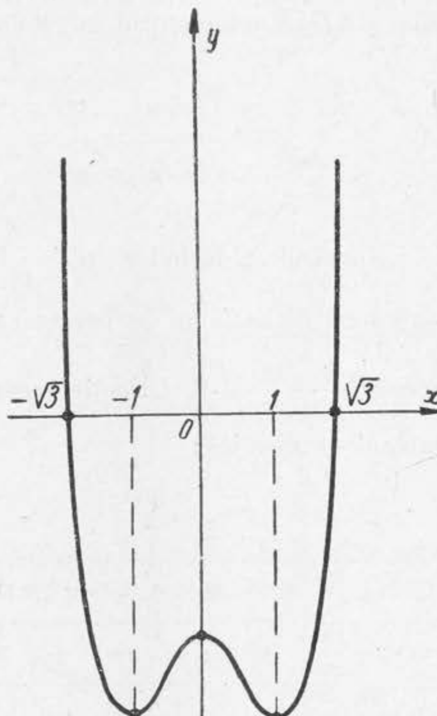


Fig. 143

3) *Fie ecuația*

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Prin derivare, obținem ecuația $3x^2 - 4x - 4 = 0$, care are rădăcinile $-\frac{2}{3}$ și 2.

Calculăm limitele

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 2x^2 - 4x + 6) = -\infty.$$

$$f(+\infty) - \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 2x^2 - 4x + 6) = +\infty.$$

Formăm șirul lui Rolle, intercalînd și pe 0 pe prima linie

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{202}{27}$	6	-2	$+\infty$

Ecuația are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare din intervalele următoare: $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, (0,2), (2, $+\infty$).

4) *Fie ecuația $x^3 - 5x^2 + 3x + m = 0$, unde m este un parametru. Să se discute rădăcinile reale ale acestei ecuații, după valorile parametrului.*

Prin derivare, obținem ecuația $3x^2 - 10x + 3 = 0$, care are rădăcinile $\frac{1}{2}$ și 3. Formăm șirul lui Rolle.

(x)	$-\infty$	(0)	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	(m)	$\frac{13}{27} + m$	$-9 + m$	$+\infty$

Numărul rădăcinilor reale depinde de semnul numerelor $\frac{13}{27} + m$, $-9 + m$. Valorile lui m pentru care $\frac{13}{27} + m$ și $-9 + m$ se anulează sînt respectiv $-\frac{13}{27}$ și 9. Discuția semnului acestor numere este sintetizată în tabloul de mai jos:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
m \ $f(x)$	$-\infty$	m	$\frac{13}{27} + m$	$-9 + m$	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
$m < -\frac{13}{27}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	o răd. reală în intervalul $(3, +\infty)$
$m = -\frac{13}{27}$	$-$	$-$	0	$-$	$+$	o răd. dublă $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$, o răd. reală în intervalul $(3, -\infty^3)$
$-\frac{13}{27} < m < 9$	$-$	$-$	0	$-$	$+$	3 rădăcini reale în intervalele $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $(3, +\infty)$.
$m = 9$	$-$	$+$	$+$	9	$+$	o răd. dublă $x_1 = x_2 = 3$, o răd. reală în intervalul $(-\infty, 0)$
$m > 9$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	o răd. reală în intervalul $(-\infty, 0)$

§ 8. APROXIMAREA RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII

După cum s-a văzut în paragraful precedent, șirul lui Rolle permite determinarea numărului rădăcinilor reale (diferite) ale unei ecuații și precizarea anumitor intervale în care se află cuprinse aceste rădăcini.

Fie $f(x) = 0$ o ecuație, unde f este o funcție derivabilă pe un interval I, și fie $[a, b]$ un interval în care se află o singură rădăcină x_0 a ecuației: $f(x_0) = 0$. Rădăcina x_0 este abscisa punctului în care graficul taie axa Ox (fig. 144). Rădăcina x_0 a ecuației poate fi aproximată cu abscisa $a + h$ a punctului în care coarda AB taie axa Ox. Triunghiurile dreptunghice Aac și cbB sînt asemenea, deci catetele lor sînt proporționale. Presupunînd, de exemplu, că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, lungimile catetelor triunghiului Aac sînt respectiv $-f(a)$ și h, iar cele ale triunghiului cbB sînt respectiv $f(b)$ și $b - a - h$. Scriind relația de proporționalitate, obținem:

$$\frac{-f(a)}{h} = \frac{f(b)}{b - a - h}.$$

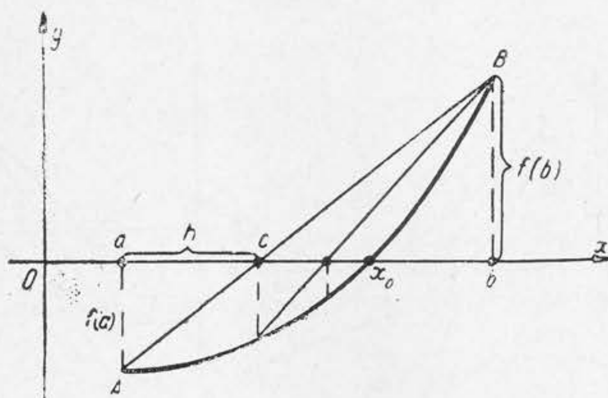


Fig. 144

Se știe că raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor este egal cu fiecare dintre cele două rapoarte, în particular este egal cu primul raport:

$$\frac{-f(a)}{h} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de unde:

$$\boxed{h = -\frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).}$$

În cazul cînd $f(a) > 0$ și $f(b) < 0$, se obține aceeași formulă.

Numărul $a + h$ aproximează rădăcina x_0 a ecuației.

Această metodă de calcul cu aproximație al rădăcinilor se numește *metoda coardei*.

Observații. 1° Pentru a stabili dacă numărul $a + h$ aproximează rădăcina x_0 a ecuației prin lipsă sau prin exces, se trasează sumar graficul funcției corespunzător intervalului $[a, b]$. În cazurile din figura 144 și figura 145 aproximația este prin lipsă; în cazurile din figura 146

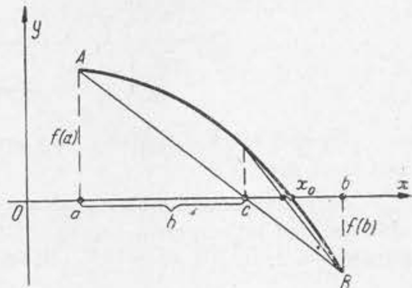


Fig. 145

și figura 147, aproximația este prin exces. Din aceste figuri se deduce ușor că dacă f'' păstrează același semn pe $[a, b]$, atunci aproximația este *prin lipsă*, dacă $f(a)$ și f'' au *semne contrare*, și *prin exces*, dacă $f(a)$ și f'' au *același semn*.

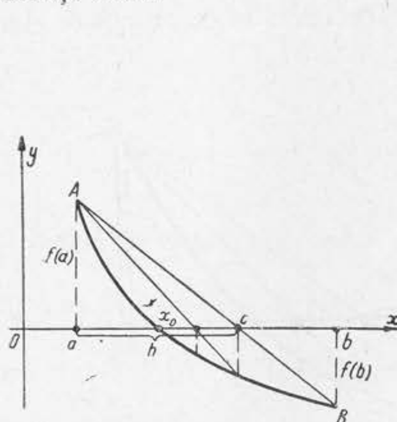


Fig. 146

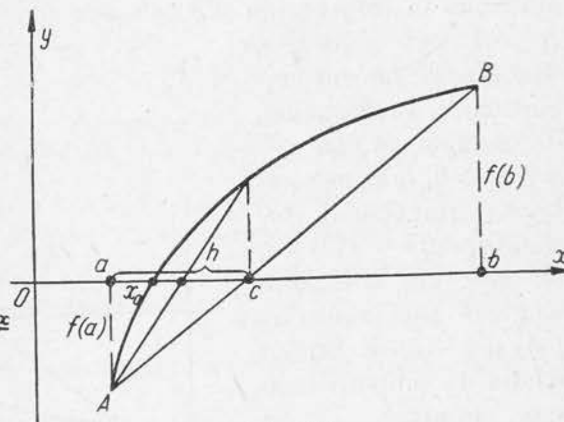


Fig. 147

2° Pentru o aproximare mai bună a rădăcinii x_0, se poate aplica încă o dată metoda coardei în acel interval $[a, a + h]$ sau $[a + h, b]$ la extremitățile căruia funcția are valori de semne contrare.

Exemplu. Fie ecuația $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$.

Să formăm mai întîi șirul lui Rolle pentru a separa rădăcinile ecuației. Pentru aceasta, aflăm rădăcinile derivatei:

$$3x^2 - 6 = 0 \quad \text{sau} \quad x^2 - 2 = 0,$$

de unde: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x + 2) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 6x + 2) = +\infty$;

$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2 = 4\sqrt{2} + 2 > 0$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2 = -4\sqrt{2} + 2 < 0$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

Ecuația are trei rădăcini: una mai mică decît $-\sqrt{2}$, una între $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ și una mai mare decît $\sqrt{2}$.

Să calculăm cu aproximație rădăcina cuprinsă între $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$. Pentru aceasta, restrîngem mai întîi intervalul în care se află rădăcina, calculînd valorile funcției $f(x)$ în punctele -1, 0, și 1:

$$f(-1) = -1 + 6 + 2 = 7; \quad f(0) = 2; \quad f(1) = 1 - 6 + 2 = -3.$$

Rădăcina se află cuprinsă între 0 şi 1, deoarece $f(0) > 0$ şi $f(1) < 0$. Aplicăm formula de mai sus pentru $a = 0$ şi $b = 1$:

$$h = -\frac{1-0}{f(1)-f(0)} f(0) = -\frac{1-0}{-3-2} \cdot 2 = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Rădăcina este aproximativ $a + h = 0 + 0{,}4 = 0{,}4$.

Derivata a doua: $f''(x) = 6x > 0$ pentru $0 < x < 1$; $f(0) > 0$ şi $f'' > 0$, deci aproximaţia este prin exces.

Calculăm acum $f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 6 \cdot 0{,}4 + 2 = -0{,}336 < 0$.

Rădăcina se află cuprinsă între 0 şi 0,4.

Se aplică încă o dată metoda coardei. Pentru aceasta luăm acum $a_1 = 0$ şi $b_1 = 0{,}4$. Atunci

$$h_1 = -\frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} f(a_1) = -\frac{0{,}4-0}{f(0{,}4 - f(0)} f(0) = -\frac{0{,}4-0}{-0{,}336-2} \cdot 2 = \frac{0{,}8}{2{,}336} = 0{,}342..$$

Rădăcina este aproximativ $a_1 + h_1 = 0 + 0{,}342 = 0{,}342$ şi este calculată prin exces deoarece $f(a_1) > 0$ şi $f'' > 0$.

Se poate continua în acest fel pentru a determina rădăcina cu aproximaţie mai bună,

EXERCIŢII

Aplicînd teorema lui Rolle să se arate că rădăcinile derivatelor polinoamelor:

1. $f_1(x) = (2x - 1)(x + 5)(x - 3)(x - 7)$,

2. $f_2(x) = x(x + 1)(5x - 2)(x + 3)(x - 4)$

sînt reale şi să se precizeze intervalele în care sînt situate aceste rădăcini.

Utilizînd formula creşterilor finite, să se arate că derivatele funcţiilor următoare iau valorile specificate în dreptul fiecăreia, în intervalele respective. Să se verifice rezultatele.

3. $f(x) = 2x^2 - 7$; $f'(x) = 6$ într-un punct din $(1, 2)$.

4. $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}$; $f'(x) = \frac{11}{24}$ într-un punct din $(-1, 1)$.

5. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$; $f'(x) = -\ln 9$ în două puncte din $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. $f(x) = \arcsin\left[\sqrt{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]$; $f'(x) = \frac{\pi}{2}$ în două puncte din $(1, 2)$.

7. Aplicînd funcţiei $f(x) = x^n$ (n număr natural) formula creşterilor finite în intervalul $[a, b]$, $0 < a < b$, să se demonstreze inegalităţile:

$$n(b - a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b - a)b^{n-1}.$$

Să se demonstreze inegalităţile :

8. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \; (x > 0)$.

9. $e^x > ex \; (x > 1)$.

În fiecare din exerciţiile următoare, să se arate prin derivare (v. § 1, nr. 4) că funcţiile indicate diferă printr-o constantă şi să se determine respectiva constantă.

10. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+a}{1-ax}$ (a număr real oarecare).

11. $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; $g(x) = 2 \arcsin x$.

12. $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$; $g(x) = 3 \arcsin x$.

13. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x}{5 \cos x + 4}$; $g(x) = \arccos \frac{5 \cos x + 4}{4 \cos x + 5}$.

14. Un corp cu masa de 10 kg este aruncat cu o viteză iniţială de 800 m/s. Considerînd că forţa datorită rezistenţei aerului este de 100 kg, să se calculeze energia cinetică a corpului la 2 secunde din momentul aruncării (se poate admite că în primele două secunde traiectoria este liniară).

15. Un tren porneşte dintr-o gară cu o acceleraţie de 0,4 m/s² timp de 50 secunde, apoi îşi continuă drumul cu viteza corespunzătoare momentului $t = 50$. Cu 500 m înainte de gara următoare, se imprimă trenului — prin frînare — o acceleraţie negativă. Să se determine :

1° Cît trebuie să fie această acceleraţie pentru ca trenul să se oprească după cei 500 m?

2° În cît timp parcurge trenul distanţa de 37 km dintre cele două gări?

Să se stabilească intervalele de monotonie şi — cînd este cazul — extremele următoarelor funcţii :

16. $f(x) = x^2 - 10x$. 17. $f(x) = x^3 - 27x$. 18. $f(x) = x^3(8 - x)$.

19. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. 20. $f(x) = \frac{2-5x}{3x+4}$. 21. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

22. $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$. 23. $f(x) = \frac{x^2}{x^4+4}$. 24. $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

25. $f(x) = \sin x - \cos x$, definită pe intervalul $[0, 2\pi]$.

26. $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, definită pe $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

27. $f(x) = \frac{4 \sin x}{4 - \cos^2 x}$, definită pe intervalul $[0, 2\pi]$.

28. $f(x) = x \ln x$. **29.** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. **30.** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

31. $f(x) = \ln \cos x$, definită pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

32. $f(x) = x^3e^x$. **33.** $f(x) = x^4e^{-x}$. **34.** $f(x) = x^ne^{-x}$ (n natural).

35. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ **36.** $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

37. $f(x) = x^x$. **38.** $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

39. Mişcarea uniform accelerată a unui mobil pe axa Ox este dată de legea $s(t) = 2t^2 - 8t + 2$. Să se determine:

1° poziţia iniţială a mobilului;

2° în ce sens al axei Ox şi cu ce viteză începe mişcarea mobilului;

3° în ce moment îşi schimbă mobilul sensul de deplasare.

40. Mişcarea unui oscilator armonic este dată de legea $s(t) = 4 \sin \pi t$. Să se determine poziţia, viteza şi sensul de deplasare a mobilului după t secunde de la începerea mişcării ($t = 0{,}75$).

Să se stabilească intervalele de convexitate şi de concavitate şi — cînd este cazul — punctele de inflexiune ale următoarelor funcţii:

41. $f(x) = x^2 - 3x + 1$. **42.** $f(x) = -5x^2 + x + 2$.

43. $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$. **44.** $f(x) = x^4 - 1$.

45. $f(x) = 3x^7 + x + 1$. **46.** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, **47.** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

48. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. **49.** $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

50. $f(x) = \sin x - \cos x$, definită pe intervalul $[0, 2\pi]$.

51. $f(x) = x^2 \ln x$. **52.** $f(x) = e^{-x^2}$.

Să se determine asimptotele graficelor următoarelor funcţii:

53. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. **54.** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. **55.** $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$.

56. $f(x) = \frac{x}{x-1}$. **57.** $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. **58.** $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$.

59. $f(x) = \frac{5x^3-2x^2+1}{x^2-4}$ **60.** $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. **61.** $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

62. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$. **63.** $f(x) = \ln(x^2-1)$. **64.** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Procedînd conform indicațiilor de la § 5, să se reprezinte grafic următoarele funcții :

65. $f(x) = x^2+x+1$. 66. $f(x) = -x^2+4x$. 67. $f(x) = x^3 + 1$.

68. $f(x) = x^4 - 4$. 69. $f(x) = \frac{1}{10}(x^5 - 5x^3 + 4x)$.

70. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 71. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 72. $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

73. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. 74. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. 75. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

76. $f(x) = \frac{3}{(1-x^2)(4-x^2)}$. 77. $f(x) = \sqrt{x-2}$. 78. $f(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{x}$.

79. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$. 80. $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. 81. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

82. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. 83. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$. 84. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

85. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$. 86. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$. 87. $f(x) = \frac{2^x}{4}$.

88. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 89. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. 90. $f(x) = xe^x$.

91. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 92. $f(x) = x\ln x$. 93. $f(x) = x^2 \ln x$.

Procedînd ca în exemplele de la § 6, să se rezolve problemele de maxim și minim de mai jos (94—100) :

94. Considerînd două numere strict pozitive de sumă dată, a, să se determine valoarea maximă a produsului puterilor lor, respectiv a m-a și a n-a $(m > 0,\ n > 0.)$

95. Considerînd două numere strict pozitive de produs dat, a, să se determine valoarea minimă a sumei puterilor lor, respectiv a m-a și a n-a $(m > 0,\ n > 0)$.

96. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază dată, r.

97. Să se determine dreptunghiul de arie maximă care are două vîrfuri pe o latură a unui triunghi dat, iar celelalte două vîrfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

98. Să se determine cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază dată, r.

99. Să se determine cilindrul de volum maxim pentru care perimetrul secţiunii axiale este de 6 m.

100. Dintr-un rîu de lăţime a porneşte un canal de lăţime b, formînd un unghi drept cu rîul. Care este lungimea maximă a unui vas care poate intra în acel canal? (Se neglijează lăţimea vasului.)

101. Fiind dată o tablă metalică de formă pătratică, de latură a, se taie în fiecare colţ cîte un pătrat de latură x. Dreptunghiurile rămase se îndoaie şi se obţine o cutie cu baza pătrată. Să se determine x astfel încît volumul cutiei să fie maxim.

102. Două oraşe A şi B sînt situate la distanţe respectiv de 3 km şi 1 km de şosea. Ştiind că proiecţia distanţei AB pe şosea este de 10 km, să se găsească traseul cel mai economic pentru o cale ferată care să unească cele două oraşe, mergînd în vecinătatea şoselei, iar — pe o porţiune de 2 km — paralel cu şoseaua (pe această porţiune distanţa dintre calea ferată şi şosea se consideră nulă).

103. La ce înălţime trebuie aşezată o lampă pe verticala centrului unei piste circulare de rază R, pentru ca această pistă să fie luminată la maxim, ştiind că intensitatea luminii într-un punct M este proporţională cu sinusul unghiului θ format de raza de lumină cu planul pistei şi invers proporţională cu pătratul distanţei de la M la sursă.

Utilizînd rezultatele de la § 7, să se stabilească numărul rădăcinilor reale ale fiecăreia dintre ecuaţiile următoare şi să se separe aceste rădăcini :

104. $x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0.$ **105.** $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 4 = 0.$

106. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0.$ **107.** $x^5 - 4x^2 + 3 = 0.$

Să se discute după valorile parametrului m rădăcinile reale ale următoarelor ecuaţii :

108. $x^3 + x^2 - x + m = 0.$ **109.** $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + m = 0.$

110. $x^4 - 4mx^3 + 4m^2x^2 - m^2 = 0.$ **111.** $5x^6 - 18x^5 + 15x^4 + m = 0.$

112. $9x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6m = 0.$ **113.** $x^3 + px + q = 0.$

114. $x^4 + px + q = 0.$ **115.** $x^{2n+1} + px + q = 0.$

116. $x^2 - x - \ln x + m = 0.$ **117.** $x^2 + x + e^{-x} + m = 0.$

118. Să se calculeze rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 - x - 1 = 0$, aplicînd de două ori metoda coardei.

119. Să se calculeze rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 - 8x - 1 = 0$, aplicînd de trei ori metoda coardei.

120. Să se arate că ecuația $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 13x + 4 = 0$ are o rădăcină situată în intervalul (1,2) și să se aplice de două ori metoda coardei pentru calcularea acestei rădăcini.

121. Să se rezolve ecuația $20x^3 - 24x^2 + 3 = 0$, calculînd fiecare dintre rădăcini, aplicînd de două ori metoda coardei.

CAPITOLUL XI

INTEGRALE

§ 1. CALCULUL ARIILOR SUPRAFEŢELOR PLANE

Una din problemele importante ale matematicii a fost aceea a calculului ariilor unor suprafeţe plane. Pentru rezolvarea acestei probleme a fost creat un nou instrument de calcul — integrala — care s-a dovedit foarte util şi în rezolvarea altor probleme, puse de fizică.

Din geometrie se ştie cum se calculează ariile unor suprafeţe simple, cum sînt : triunghiul, dreptunghiul, paralelogramul. Aria unui poligon se obţine descompunînd poligonul în triunghiuri şi însumînd ariile acestora (fig. 148).

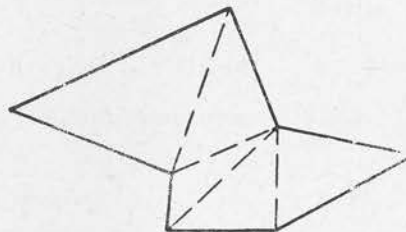


Fig. 148

Pentru calculul ariei unui cerc de rază R se consideră un şir de poligoane regulate înscrise în cerc, cu un număr de laturi din ce în ce mai mare. Cu cît numărul laturilor este mai mare, cu atît poligonul diferă mai puţin de cerc. Şirul ariilor acestor poligoane are limita πR^2. Dacă se consideră un şir de poligoane circumscrise, cu un număr de laturi din ce în ce mai mare, şirul ariilor acestor poligoane are de asemenea limita πR^2. Limita comună, πR^2, a celor două şiruri de arii a fost luată — prin definiţie — ca arie a cercului.

Procedeul folosit pentru calculul ariei cercului poate fi extins şi în cazul altor suprafeţe, definind aria ca limită comună a ariilor unor anumite şiruri de poligoane (nu neapărat regulate).

1. Aria triunghiului

Să arătăm mai întîi că, aplicînd acest procedeu în cazul unui triunghi, se obține într-adevăr aria triunghiului.

Să considerăm triunghiul OaA mărginit de axa Ox, graficul funcției $f(x) = 2x$ (dreapta $y = 2x$) și dreapta $x = a$, $a > 0$ (fig. 149).

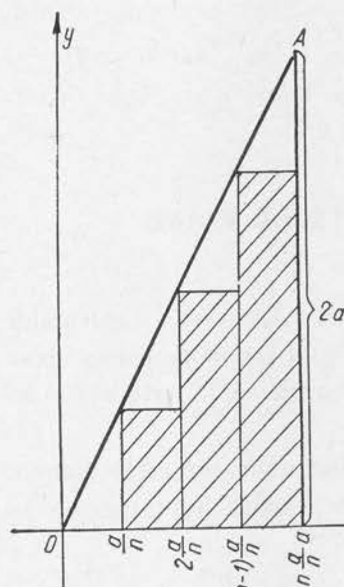


Fig. 149

Acest triunghi are baza a și înălțimea $f(a) = 2a$, deci aria sa este $S = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$.

Pentru calculul acestei arii vom aplica acum următorul procedeu:

Împărțim intervalul $[0, a]$ în n părți egale de lungime $\frac{a}{n}$, prin $n + 1$ puncte de diviziune:

$$\frac{a}{n}, 2\frac{a}{n}, 3\frac{a}{n}, ..., (n-1)\frac{a}{n}, n\frac{a}{n}.$$

Pe fiecare din cele n intervale parțiale, ca bază, construim cîte un dreptunghi ca în figura 149 *. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respective

$$0, 2\frac{a}{n}, 4\frac{a}{n}, ..., 2(n-1) \cdot \frac{a}{n}.$$

Ariile acestor dreptunghiuri sînt respectiv

$$\frac{a}{n} \cdot 0, \frac{a}{n} \cdot 2\frac{a}{n},$$

$$\frac{a}{n} \cdot 4\frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n} \cdot 2(n-1)\frac{a}{n}.$$

Aria s_n a poligonului hașurat în figura 149 este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor:

$$s_n = \frac{a}{n} \cdot 0 + \frac{a}{n} \cdot 2\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \cdot 4\frac{a}{n} + ... + \frac{a}{n} \cdot 2(n-1)\frac{a}{n} =$$

$$= 2\frac{a^2}{n^2}[1 + 2 + ... + (n-1)] = 2\frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = a^2\frac{n-1}{n}.$$

* În figurile 149—153 și 155 s-a luat $n = 4$; în figura 154 s-a luat $n = 5$.

$\left(1 + 2 + ... + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}\right.$ este suma unei progresii aritmetice cu n termeni, rația 1 și primul termen 1.$\left.\right)$

Aria s_n a poligonului aproximează prin lipsă aria triunghiului. Această aproximație este cu atît mai bună cu cît punctele de diviziune sînt mai numeroase (cu cît n este mai mare). Intuitiv, este de prevăzut ca limita șirului (s_n) să fie egală cu aria triunghiului. Calculînd limita șirului (s_n), obținem într-adevăr :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a^2 \frac{n-1}{n} = a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = a^2 \cdot 1 = a^2.$$

Pe fiecare din cele n intervale parțiale, ca bază, să construim acum cîte un dreptunghi ca în figura 150. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv

$$2\frac{a}{n},\ 4\frac{a}{n},\ 6\frac{a}{n},\ ...,\ 2n\frac{a}{n}.$$

Ariile acestor dreptunghiuri sînt respectiv

$$\frac{a}{n}\cdot 2\frac{a}{n},\ \frac{a}{n}\cdot 4\frac{a}{n},\ \frac{a}{n}\cdot 6\frac{a}{n},\ ...,\ \frac{a}{n}\cdot 2n\frac{a}{n}.$$

Aria S_n a poligonului hașurat în figura 150 este

$$S_n = \frac{a}{n}\cdot 2\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\cdot 4\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\cdot 6\frac{a}{n} + ... +$$
$$+ \frac{a}{n}\cdot 2n\frac{a}{n} = 2\frac{a^2}{n^2}(1+2+3+ ... +n) =$$
$$= 2\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = a^2\cdot\frac{n+1}{n}.$$

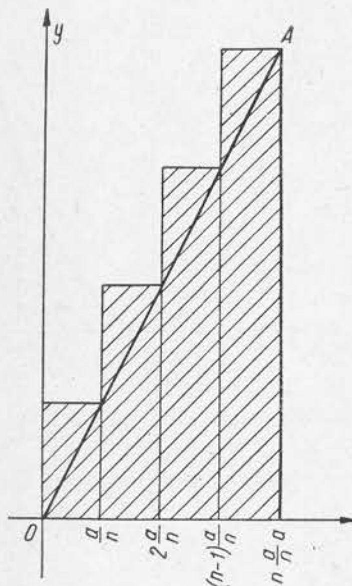


Fig. 150

Aria S_n a poligonului aproximează prin exces aria triunghiului. Această aproximație este cu atît mai bună, cu cît n este mai mare. Limita șirului (S_n) este de asemenea egală cu aria triunghiului. Într-adevăr :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a^2 \frac{n+1}{n} = a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = a^2 \cdot 1 = a^2.$$

Este evident că în cazul triunghiului este mult mai simplu să-i aflăm aria direct, calculînd produsul dintre bază și înălțime și împărțind prin 2, decît căutînd limita șirului ariilor unor poligoane.

Însă, în cazul altor suprafețe, de exemplu mărginite de linii curbe, nu mai dispunem de un procedeu direct pentru definirea și calcularea ariei, deci trebuie să recurgem la procedeul de aproximare prin poligoane.

2. Aria segmentului de parabolă

Să considerăm triunghiul curbiliniu OaA mărginit de axa Ox, parabola $y = x^2$ (graficul funcției $f(x) = x^2$) și dreapta $x = a$, $a > 0$ (fig. 151).

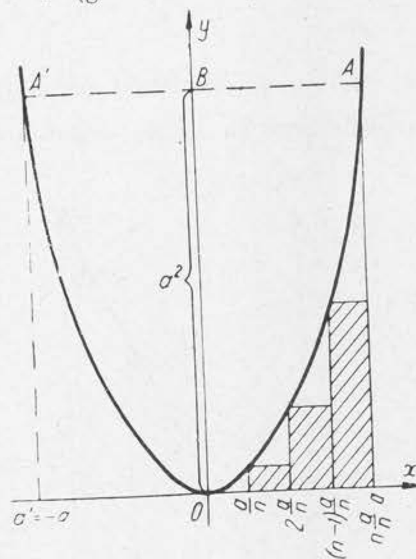


Fig. 151

Să împărțim intervalul $[0, a]$ în n părți egale prin punctele de diviziune

$$0, \frac{a}{n}, 2\frac{a}{n}, 3\frac{a}{n}, \ldots, (n-1)\frac{a}{n}, n\frac{a}{n} = a$$

și pe fiecare interval parțial să construim cîte un dreptunghi ca în figura 151. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv

$$0, \frac{a^2}{n^2}, 2^2\frac{a^2}{n^2}, \ldots, (n-1)^2\frac{a^2}{n^2}.$$

Ariile acestor dreptunghiuri sînt respectiv

$$\frac{a}{n}\cdot 0, \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2}, \frac{a}{n}\cdot 2^2\frac{a^2}{n^2}, \ldots, \frac{a}{n}(n-1)^2\frac{a^2}{n^2}.$$

Aria s_n a poligonului hașurat în figura 151 este

$$s_n = \frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot 2^2\frac{a^2}{n^2} + \ldots + \frac{a}{n}(n-1)^2\frac{a^2}{n^2} =$$

$$= \frac{a^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2] * = \frac{a^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{a^3}{3} - a^3\frac{1}{2n} + a^3\frac{1}{6n^2}.$$

* Se știe că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$. Pentru demonstrarea acestei egalități se pleacă de la identitatea $(p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$, se face succesiv $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ și se adună egalitățile obținute.

Pentru $m = n - 1$ se obține

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Luînd $n = 1, 2, 3, \ldots$, obținem un șir de poligoane care au respectiv ariile $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Limita acestui șir este:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{3} - a^3\frac{1}{2n} + a^3\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{a^3}{3}.$$

Să construim acum pe fiecare interval parțial un dreptunghi ca în figura 152. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv

$$\frac{a^2}{n^2},\ 2^2\frac{a^2}{n^2},\ 3^2\frac{a^2}{n^2},\ \ldots,\ n^2\frac{a^2}{n^2},$$

iar ariile respectiv

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2},\ \frac{a}{n}\cdot 2^2\frac{a^2}{n^2},\ \frac{a}{n}\cdot 3^2\frac{a^2}{n^2},\ \ldots,\ \frac{a}{n}\cdot n^2\frac{a^2}{n^2}.$$

Aria S_n a poligonului hașurat în figura 152 este

$$S_n = \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot 2^2\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot 3^2\frac{a^2}{n^2} + \ldots + \frac{a}{n}\cdot n^2\frac{a^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{a^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{a^3}{3} + a^3\cdot\frac{1}{2n} + a^3\cdot\frac{1}{6n^2}.$$

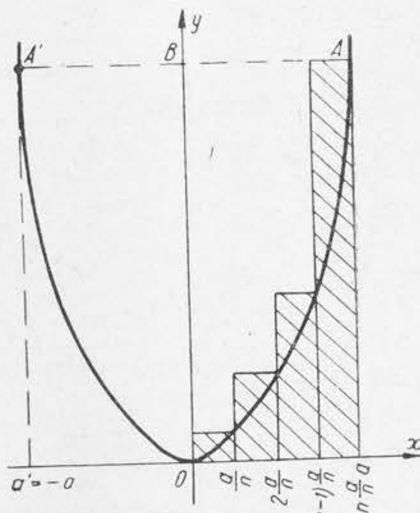


Fig. 152

Luînd $n = 1, 2, 3, \ldots$ obținem un șir de poligoane care au respectiv ariile $S_1, S_2, S_3, \ldots$ Limita acestui șir este

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{3} + a^3\frac{1}{2n} + a^3\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{a^3}{3}.$$

Poligoanele din figura 151 sînt conținute în triunghiul curbiliniu OaA, iar poligoanele din figura 152 conțin triunghiul curbiliniu; aceste poligoane diferă de triunghiul curbiliniu cu atît mai puțin cu cît n este mai mare. Este, deci, natural ca aria S a triunghiului curbiliniu să fie un număr de care ariile s_n și S_n să difere cu atît mai puțin, cu cît n este mai mare. Acest număr este limita comună a celor două șiruri de arii, (s_n) și (S_n).

Aria triunghiului curbiliniu OaA este prin definiție egală cu $\frac{a^3}{3}$.

Să arătăm că, folosind alte dreptunghiuri, se obține același rezultat.

Împărţind ca mai înainte intervalul $[0, a]$ în n părţi egale, să alegem un punct ξ_1 în primul interval parţial, un punct ξ_2 în al doilea interval parţial, ..., un punct ξ_n în al n-lea interval parţial (fig. 153):

$$0, \xi_1, \frac{a}{n}, \xi_2, \frac{2a}{n}, \ldots, (n-1)\frac{a}{n}, \xi_n, n\frac{a}{n}.$$

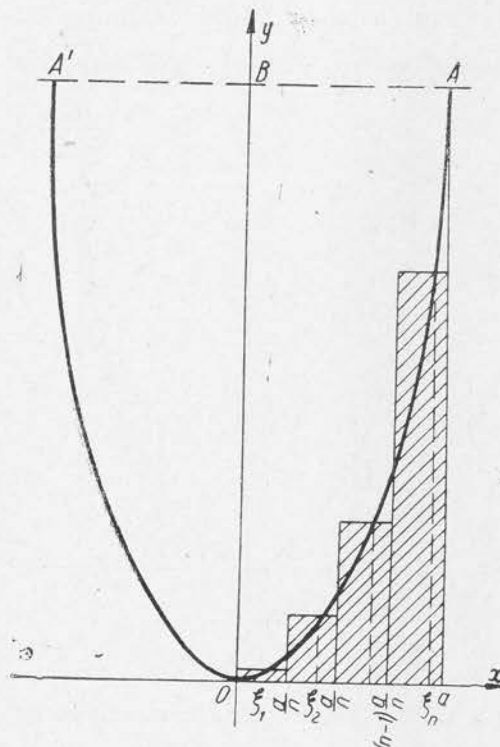


Fig. 153

Pe aceste intervale parţiale, ca baze, să construim dreptunghiuri ca în figura 153, avînd înălţimile respectiv

$$\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^2$$

şi ariile respectiv

$$\frac{a}{n}\cdot\xi_1^2, \frac{a}{n}\cdot\xi_2^2, \ldots, \frac{a}{n}\cdot\xi_n^2.$$

Aria σ_n a poligonului haşurat în figura 153 este

$$\sigma_n = \frac{a}{n}\xi_1^2 + \frac{a}{n}\xi_2^2 + \ldots + \frac{a}{n}\xi_n^2.$$

Acest poligon este cuprins între poligoanele din figura 151 şi figura 152, deci

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n.$$

Trecînd la limită în inegalităţi, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a^3}{3}$, astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{a^3}{3}.$$

Se observă că aria $\frac{a^3}{3}$ a triunghiului curbiliniu OaA este egală cu o treime din aria a^3 a dreptunghiului $BOaA$, deci aria triunghiului curbiliniu BOA este egală cu două treimi din aria acestui dreptunghi. Rezultă că aria segmentului de parabolă $A'OA$ este egală cu două treimi din aria dreptunghiului $A'a'aA$ *.

* Acest rezultat a fost obţinut pentru prima oară de *Arhimede* (287—212 î.e.n.).

§ 2. INTEGRALA

Procedeul expus în paragraful precedent, în cazul funcţiilor $f(x) = 2x$ şi $f(x) = x^2$, *pozitive* pe intervalul $[0, a]$, va fi extins acum pentru o funcţie oarecare f (nu neapărat pozitivă), pe un interval oarecare $[a, b]$.

1. Definiţia integralei

Fie f o funcţie definită pe un interval I şi $a < b$ două puncte din acest interval (fig. 154).

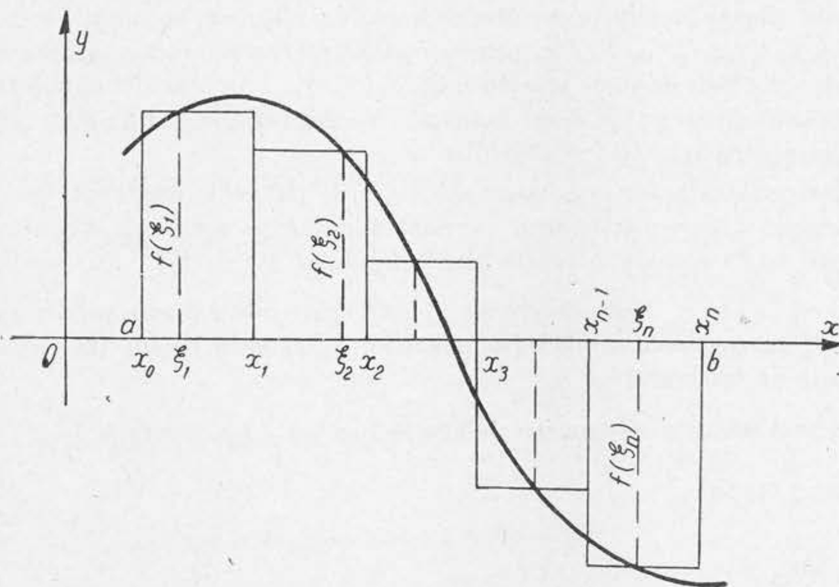


Fig. 154

Să împărţim intervalul $[a, b]$ în n intervale parţiale egale *, prin punctele de diviziune

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n = b.$$

(Dacă $l = b - a$ este lungimea intervalului $[a, b]$, fiecare interval parţial are lungimea $\frac{l}{n}$.)

---

* Intervalele se aleg egale pentru a simplifica expunerea.

În fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ să alegem un punct oarecare ξ_i adică $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$; să considerăm valoarea $f(\xi_i)$ a funcției f în acest punct și să formăm produsul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Pentru cele n intervale parțiale obținem produsele

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0),\ f(\xi_2)(x_2 - x_1),\ \ldots,\ f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Să notăm cu S_n suma acestor produse:

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

S_n se numește *sumă integrală* a funcției f. Luînd succesiv $n = 1, 2, 3, \ldots$ (adică împărțind intervalul $[a, b]$ în părți din ce în ce mai mici), pentru o *anumită* alegere a punctelor intermediare, ξ_i, obținem un șir de sume integrale, $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$; pentru o *altă* alegere a punctelor intermediare, ξ_i', obținem *alt* șir de sume integrale, $S_1', S_2', \ldots, S_n', \ldots$ În acest fel putem forma o infinitate de șiruri de sume integrale, corespunzătoare diferitelor alegeri posibile pentru punctele intermediare.

Observație. Dacă $a = b$, intervalul $[a, b]$ se reduce la un punct, deci este de lungime 0. Se constată ușor că, dacă adaptăm la acest caz procedeul de mai sus, toate sumele integrale sînt nule: $S_n = 0$.

Definiție. Dacă fiecare șir (S_n) de sume integrale are aceeași limită finită I, independentă de alegerea punctelor ξ_i, spunem că funcția f este integrabilă pe intervalul (a, b).

Limita unică I se numește integrala funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se notează $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

În § 6 se va arăta că, în cazul cînd funcția f este *pozitivă*, numărul $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ reprezintă aria suprafeței mărginite de axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x = a$, $x = b$.

Notația $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se citește *integrală de la a la b* din $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se folosește de asemenea notația $\int_a^b f\,dx$.

Semnul $\int$ se numește *semn de integrală*; a și b se numesc *limite de integrare*; a este *limita inferioară*, iar b este *limita superioară*; intervalul $[a, b]$ se numește *interval de integrare*.

Funcția f se numește *funcție de integrat*; x se numește *variabilă de integrare*. Variabila de integrare se poate nota și cu litere : t, u, v, y, z, α etc. Astfel :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \text{ etc.}$$

Din observația precedentă rezultă că

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Se definește de asemenea integrala $\int_b^a f(x)\,dx$, cu limita inferioară mai mare decît limita superioară, $b > a$, prin egalitatea

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Trebuie reținut că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este un *număr* (fie că $a \leqslant b$, fie că $a \geqslant b$).

Se poate demonstra următoarea proprietate :

Orice funcție continuă pe un interval (a, b) este integrabilă pe acest interval.

Demonstrația acestei proprietăți depășește cadrul manualului.

Funcțiile $f(x) = 2x$ și $f(x) = x^2$ sînt integrabile pe intervalul $[0, a]$ fiind continue pe acest interval. Din considerațiile făcute în paragraful precedent rezultă

$$\int_0^a 2x\,dx = a^2; \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

În ce privește funcțiile discontinue, unele sînt integrabile, iar altele nu sînt integrabile.

De exemplu, funcția f definită pe $[0, 1]$ prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 1 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu este integrabilă pe $[0, 1]$.

Într-adevăr, alegînd punctele intermediare ξ_i *raționale*, avem $f(\xi_i) = 0$, deci sumele integrale corespunzătoare S_n sînt toate nule și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$; alegînd punctele intermediare ξ_i' *iraționale* avem $f(\xi_i') = 1$ și sumele integrale corespunzătoare S_n' sînt toate egale cu 1:

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) +$$
$$+ \dots + (x_n - x_{n-1}) = -x_0 + x_n = 0 + 1 = 1.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = 1$.

Limita șirului sumelor integrale depinde de alegerea punctelor intermediare, deci funcția *nu* este integrabilă.

Observații. 1° Conform definiției precedente, dacă f este o funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$, fiecare șir (S_n) de sume integrale are *aceeași* limită, $\int_a^b f(x)\,dx$, independentă de alegerea punctelor ξ_i. Așadar, pentru calculul integralei este suficient să luăm un *singur* șir (S_n) de sume integrale, corespunzător unui mod particular de alegere a punctelor ξ_i (de exemplu, la extremitatea stîngă sau la extremitatea dreaptă a intervalelor parțiale).

2° La începuturile analizei, suma integrală $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$ era notată $\mathop{S}\limits_a^b f(x)\,\Delta x$, unde Δx reprezenta lungimea comună $\frac{l}{n}$ a fiecăruia din cele n intervale parțiale. Notația integralei prin $\int_a^b f(x)\,dx$ amintește această notație a sumei integrale: semnul de integrare $\int$ provine din litera S prin alungire, iar dx provine din Δx.

3° Semnul de diferențială dx care apare în notația integralei nu are justificare teoretică, dar s-a păstrat pînă astăzi prin tradiție. Avantajul acestei notații este acela că, dacă f este o funcție de mai multe variabile, prin dx se precizează că variabila de integrare este x. Această notație prezintă de asemenea un avantaj la calculul integralei unei funcții compuse (metoda schimbării de variabilă), așa cum se va vedea mai departe.

2. Formula lui Leibniz-Newton

Procedeul de calcul al integralei ca limită a şirurilor de sume integrale, expus anterior, necesită calcule laborioase chiar pentru funcţiile cele mai simple.

În acest număr se va arăta că, cel puţin pentru funcţiile continue, integrala este strîns legată de operaţia de derivare. Această legătură este exprimată de formula lui Leibniz-Newton, care este dată mai jos.

Enunţăm mai întîi proprietatea următoare, a cărei demonstraţie depăşeşte cadrul manualului.

Dacă f este o funcţie continuă pe un interval I, există o funcţie F derivabilă pe I, a cărei derivată este egală cu f:

$$F' = f.$$

Fie f o funcţie *continuă* pe un interval $[a, b]$ şi F o funcţie a cărei derivată este f:

$$F'(x) = f(x).$$

Să împărţim intervalul $[a, b]$ în n părţi egale prin punctele de diviziune

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_{n-1}, x_n = b.$$

Să aplicăm teorema creşterilor finite funcţiei F, în fiecare interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$,; există un punct $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, astfel încît:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) F'(\xi_i) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

sau

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Făcînd $i = 1, 2, ..., n$, obţinem egalităţile

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(x_0) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) \\
F(x_2) - F(x_1) &= f(\xi_2)(x_2 - x_1) \\
F(x_3) - F(x_2) &= f(\xi_3)(x_3 - x_2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) &= f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) \\
F(x_n) - F(x_{n-1}) &= f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Adunînd aceste egalităţi membru cu membru şi reducînd termenii asemenea din membrul stîng, obţinem:

$$F(x_n) - F(x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ...$$
$$... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S_n$$

sau, deoarece $x_n = b$ şi $x_0 = a$,

$$F(b) - F(a) = S_n.$$

Toate sumele integrale S_n (corespunzătoare modului particular de alegere a punctelor ξ_i, indicat de teorema creşterilor finite) sînt egale cu $F(b) - F(a)$.

Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ (fiind continuă). Observînd că şirul (S_n) este constant, rezultă :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = F(b) - F(a).$$

Pentru integrala $\int_b^a f(x)\,dx$ obţinem :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b).$$

Am obţinut astfel formula următoare :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

numită *formula lui Leibniz-Newton.*

Această formulă este valabilă fie că $a < b$, fie că $a > b$; ea este valabilă şi în cazul cînd $a = b$, deoarece

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ şi } F(a) - F(a) = 0.$$

Dacă Φ este o altă funcţie a cărei derivată este f, $\Phi' = f$, urmînd raţionamentul de mai sus deducem :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Aşadar, formula lui Leibniz-Newton este valabilă *oricare* ar fi funcţia F a cărei derivată este f.

Pentru calculul integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ este, deci, suficient să cunoaştem o *singură* funcţie F a cărei derivată este f.

Pentru uşurinţa calculului, diferenţa $F(b) - F(a)$ se notează $F(x)\Big|_a^b$.

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Notaţia $F(x)\Big|_a^b$ înseamnă, deci, că în funcţia $F(x)$ se înlocuieşte argumentul x *mai întîi cu limita superioară* b (şi se obţine $F(b)$), iar *apoi cu limita inferioară* a (şi se obţine $F(a)$), şi se face diferenţa numerelor obţinute:

$$F(b) - F(a).$$

Cu această notaţie, formula lui Leibniz-Newton se scrie:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b}$$

Exemple:

1) Fie $f(x) = 2x$; avem $F(x) = x^2$, deoarece

$$F'(x) = (x^2)' = 2x,$$

deci

$$\int_0^a 2x dx = x^2\Big|_0^a = a^2 - 0^2 = a^2.$$

(Am regăsit un rezultat obţinut anterior.)

2) Fie $f(x) = x^2$; avem $F(x) = \frac{x^3}{3}$, deoarece

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2,$$

deci

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{a^3}{3}.$$

(Am regăsit un rezultat obţinut anterior.)

3) Fie $f(x) = \cos x$; avem $F(x) = \sin x$, deoarece

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x,$$

deci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

§ 3. PRIMITIVE

Formula lui Leibniz-Newton reduce calculul integralei unei funcţii *continue* la rezolvarea problemei următoare:

Dîndu-se o funcţie f definită pe un interval, să se găsească o funcţie F a cărei derivată pe acest interval să fie egală cu f, F′ = f.

Dacă f este discontinuă, problema aceasta nu are totdeauna soluţie.

Dacă, însă, f este *continuă*, atunci, după cum s-a specificat în § 2, nr. 2, există totdeauna o funcţie F care să răspundă problemei de mai sus.

De aceea, *în continuare vor fi studiate numai funcţiile continue definite pe un interval.*

1. Definiţia primitivelor

Fie f o funcţie *continuă* pe un *interval* I. Dacă F este o funcţie derivabilă pe I şi dacă $F' = f$, atunci, oricare ar fi numărul C, funcţia $F + C$ are de asemenea derivata egală cu f, deoarece

$$(F + C)' = F' = f.$$

Există, deci, o mulţime infinită de funcţii care au derivatele egale cu f.

D e f i n i ţ i e. Funcţiile care prin derivare dau funcţia f se numesc primitive ale lui f.

De exemplu, funcţiile $F_1(x) = \sin x$, $F_2(x) = \sin x + 5$, $F_3(x) = \sin x - \pi$ şi, în general, $F(x) = \sin x + C$ (C număr real oarecare), sînt, *toate*, primitive ale funcţiei $f(x) = \cos x$.

Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte, în mod obişnuit, integrala nedefinită a lui f, şi se notează:

$$\int f(x)\,dx$$

(se citeşte *integrală din* $f(x)\,dx$.

Dacă argumentul funcţiei f este notat cu y, u, t etc., atunci integrala nedefinită se notează respectiv

$$\int f(y)\,dy, \quad \int f(u)\,du, \quad \int f(t)\,dt \text{ etc.}$$

Fie F o primitivă a lui f, $F' = f$. Deducem următoarele două proprietăţi:

1) *Orice funcţie de forma $F + C$ (C număr real oarecare) este o primitivă a lui f.*

Într-adevăr: $(F + C)' = F' = f$.

Aşadar, integrala nedefinită $\int f(x)\,dx$ conţine întreaga familie de funcţii $F + C$ (unde C parcurge toate numerele reale).

Reciproc:

2) *Orice primitivă a lui f este de forma $F + C$.*

Într-adevăr, dacă Φ este o primitivă a lui f, atunci $\Phi' = f$, deci $\Phi' = F'$ şi deci Φ şi F diferă printr-o constantă, $\Phi - F = C$ (v. cap. X, § 1, nr. 4), de unde $\Phi = F + C$.

Aşadar, integrala nedefinită $\int f(x)\,dx$ este formată *numai* din funcţiile familiei $F + C$. Scriem:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

C se numeşte *constanta de integrare* a integralei $\int f(x)\,dx$. Constanta de integrare se poate pune şi sub altă formă; esenţial este ca ea să parcurgă toate numerele reale. De exemplu, constanta de integrare se poate pune sub forma $\ln K$, unde K parcurge mulţimea numerelor strict pozitive, deoarece în acest caz $\ln K$ parcurge toate numerele reale; sau sub forma $\frac{C}{a}$, $(a \neq 0)$, unde C parcurge toate numerele reale, sau sub forma $C_1 + C_2$, unde C_1 şi C_2 parcurg toate numerele reale.

Observaţie. Formula $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ este adevărată dacă, şi numai dacă, funcţia f este definită pe un *interval*.

Dacă f nu este definită pe un interval, ci, de exemplu, pe o reuniune de intervale *disjuncte*, atunci integrala nedefinită conţine şi alte primitive care nu se pot obţine din una din ele, F, prin adăugarea unei constante, deci formula de mai sus nu mai este adevărată în acest caz.

De exemplu, funcţiile F şi Φ definite pe mulţimea $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel:

$$F(x) = \operatorname{tg} x \text{ şi } \Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 2, \text{ dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

sînt amîndouă primitive ale funcţiei $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ definită pe A, dar diferenţa $\Phi - F$ nu este constantă pe A, deci Φ nu se poate obţine din F prin adăugarea unei constante.

Egalitățile

$$F'(x) = f(x) \quad \text{şi} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

sînt echivalente; fiecare din ele atrage pe cealaltă. Această observație permite ca, ori de cîte ori cunoaştem o derivată, să deducem o integrală nedefinită.

Exemple. (Toate funcțiile de mai jos se consideră definite pe un interval.)

1) $0' = 0$, deci $\int 0\,dx = 0 + C = C$.

2) $x' = 1$, deci $\int 1\,dx = x + C$.

în loc de $\int 1\,dx$ se scrie $\int dx$, deci $\int dx = x + C$.

3) $(3x)' = 3$, deci $\int 3dx = 3x + C$.

4) $(x^2)' = 2x$, deci $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

5) $(x^3)' = 3x^2$, deci $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$.

6) $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$, deci $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

7) $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3$, deci $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$.

8) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, deci $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

9) $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, deci $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

10) $\left(-\frac{1}{2x^2}\right)' = \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)' = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, deci $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$.

11) $\left(-\frac{1}{3x^3}\right)' = \left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)' = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, deci $\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$.

12) $\left(7\frac{x^3}{3}\right)' = 7x^2$, deci $\int 7x^2\,dx = 7\frac{x^3}{3} + C$.

13) $\left(-9\frac{x^4}{4}\right)' = -9x^3$ deci $\int (-9x^3)\,dx = -9\frac{x^4}{4} + C$.

14) $\left(-9\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3}\right)' = -9x^3 + 7x^2$, deci $\int (-9x^3 + 7x^2)\,dx = -9\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} + C$.

15) $\left(-2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-7x\right)'=-2x^2+5x-7$, deci

$$\int(-2x^2+5x-7)\,\mathrm{d}x=-2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-7x+C.$$

16) $\int(3x+2)\,\mathrm{d}x=3\frac{x^2}{2}+2x+C,$ deoarece $\left(3\frac{x'}{2}+2x\right)'=3x+2.$

17) $\int(5x^3-7x^2-1)\,\mathrm{d}x=\frac{5x^4}{4}-7\frac{x^3}{3}-x+C$, deoarece

$$\left(5\frac{x^4}{4}-7\frac{x^3}{3}-x\right)'=5x^3-7x^2-1.$$

18) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C,$ deoarece $(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

19) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{x}+C,$ deoarece $\left(\ln|x|-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cdot$

2. Primitivele unor funcții elementare

Procedînd ca în exemplele din numărul precedent, se obține tabelul de integrale nedefinite de mai jos. (Egalitățile din acest tabel sînt adevărate dacă, și numai dacă, funcțiile respective se consideră definite pe un *interval*).

(I) $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (n întreg, $n\neq-1$)

sau:

$$\int\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}+C \text{ (} n \text{ întreg, } n\neq 1\text{).}$$

(II) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ (α real, $\alpha\neq-1$).

În particular

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$$

sau

$$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C.$$

(III) $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$

(IV) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$

(V) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$

(VI) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

(VII) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

(VIII) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

(IX) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

(X) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,;\int e^x dx = e^x + C.$

3. Proprietățile primitivelor

Din egalitățile echivalente

$$F'(x) = f(x) \quad \text{și} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

deduce imediat egalitatea:

$$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + C}$$

Această ultimă egalitate este utilizată mai jos pentru a demonstra două proprietăți importante ale integralei nedefinite.

I. $$\boxed{\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx} \qquad a \neq 0.$$

Într-adevăr, să notăm cu $\frac{C}{a}$ constanta de integrare a integralei $\int f(x)\,dx$, C parcurgînd toate numerele reale:

$$\int f(x)dx = F(x) + \frac{C}{a}.$$

Aceasta înseamnă

$$F'(x) = f(x), \text{ deci } (aF(x))' = aF'(x) = af(x),$$

de unde, notînd cu C constanta de integrare a integralei $\int af(x)\,\mathrm{d}x$, obţinem :

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = \int (aF(x))'\,\mathrm{d}x = aF(x) + C = a\left(F(x) + \frac{C}{a}\right) = a\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

În particular, luînd $a = -1$, obţinem :

$$\int (-f(x))\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

II. $$\boxed{\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Într-adevăr, să notăm cu C_1 şi C_2 respectiv constantele de integrare ale integralelor din membrul drept (C_1 şi C_2 parcurg toate numerele reale) :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C_1, \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C_2.$$

Aceasta înseamnă

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x),$$

deci :

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Putem nota cu $C_1 + C_2$ constanta de integrare a integralei $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$, deoarece, dacă C_1 şi C_2 parcurg toate numerele reale, atunci şi suma $C_1 + C_2$ parcurge toate numerele reale. Avem :

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int (F(x) + G(x))'\,\mathrm{d}x = (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2) =$$
$$= (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Din aproape în aproape se deduce că proprietatea II rămîne valabilă şi pentru suma a n funcţii :

$$\int (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cunoscînd primitivele unor funcţii şi aplicînd formulele I şi II putem calcula primitivele altor funcţii.

Exemple :

1) $\int \left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \ln K = \ln\frac{K}{|x|}.$

2) $\int \frac{3}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 3\operatorname{tg} x + C.$

3) $\int \frac{2x+5}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(2 + \frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2x + 5\ln|x| + C.$

4) $\int \left(-5\cos x + \frac{3}{1+x^2} - \frac{7}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = -5\int \cos x\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 7\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$

$= -5\sin x + 3\operatorname{arctg} x - 14\sqrt{x} + C.$

4. Primitivele funcţiilor compuse

Deoarece $F'(x)\,\mathrm{d}x = dF(x)$, egalitatea

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

poate fi scrisă sub formă echivalentă

$$\boxed{\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C}$$

Această egalitate este adevărată oricare ar fi funcţia F cu derivată continuă pe un interval. În particular, ea este adevărată pentru o funcţie compusă $F(u(x))$:

$$\int dF(u(x)) = F(u(x)) + C$$

sau, deoarece $\mathrm{d}F(u(x)) = F'(u(x))\,\mathrm{d}u(x)$, se obţine :

$$\int F'(u(x))\,\mathrm{d}u(x) = F(u(x)) + C.$$

Dacă nu mai punem în evidenţă argumentul x, ultima egalitate se scrie astfel :

$$\boxed{\int F'(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C}$$

Trebuie reţinut că în această formulă u este o *funcţie*. Formula are aceeaşi formă ca şi cînd u ar fi variabilă independentă.

Folosind această observaţie, putem obţine din tabelul de integrale nedefinite de la nr. 2 integralele nedefinite ale unor funcţii compuse.

(I) $$\boxed{\int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}$$ (n întreg $\neq -1$).

1) $$\int (x+2)^3\,\mathrm{d}x = \int (x+2)^3 (x+2)'\,\mathrm{d}x = \int (x+2)^3\,\mathrm{d}(x+2) = \int u^3\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x+2)^4}{4} + C.$$

2) $$\int (3x+5)^7\,\mathrm{d}x = \int (3x+5)^7 \frac{1}{3}\, 3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int (3x+5)^7 (3x+5)'\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\int (3x+5)^7\,\mathrm{d}(3x+5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^8}{8} + C.$$

3) $\int x(x^2+5)^4\,dx = \int (x^2+5)^4 \frac{1}{2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^4 (x^2+5)'\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+5)^4\, d(x^2+5) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+5)^5}{5} + C.$

4) $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,(\sin x)'\,dx = \int \sin^3 x\,d(\sin x) =$

$= \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

5) $\int e^{5x}\,dx = \int e^{4x}\,e^x\,dx = \int (e^x)^4\,de^x = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$

(II) $$\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C$$

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{(x^2+a)'}{2\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\,d(x^2+a) =$

$= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+a} + C.$

2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx = 2\int \frac{(x^2+3x+5)'}{2\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx =$

$= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+5}}\,d(x^2+3x+5) = 2\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{x^2+3x+5} + C.$

(III) $$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

1) $\int \frac{1}{x+3}\,dx = \int \frac{(x+3)'}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,d(x+3) = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C =$

$= \ln|x+3| + C.$

2) $\int \frac{1}{5x-7}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x-7}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{(5x-7)'}{(5x-7)}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{(5x-7)}\,d(5x-7) =$

$= \frac{1}{5}\ln|5x-7| + C = \ln\sqrt[5]{|5x-7|} + C.$

3) $\int \frac{-5x}{x^2+2}\,dx = -\frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = -\frac{5}{2}\int \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx =$

$= -\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,d(x^2+2) = -\frac{5}{2}\ln|x^2+2| + C.$

4) $\int \frac{x}{4x^2-3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2-3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{(4x^2-3)'}{(4x^2-3)}\,dx = \frac{1}{8}\ \ln|4x^2-3| + C.$

5) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

6) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C.$

(IV) $$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + C.}$$

1) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du =$$

$$= \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{a} + C\ (a > 0).$$

2) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{(3x+2)'}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\arcsin(3x+2) + C.$$

(V) $$\boxed{\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \operatorname{arctg} u + C.}$$

1) $$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0).$$

2) $$\int \frac{1}{1+(2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+3)'}{1+(2x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(2x+3)^2}\,d(2x+3) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) + C.$$

(VI) $$\int \sin u \, du = -\cos u + C.$$

1) $$\int \sin 2x \, dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

2) $$\int \sin (2x + 3) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin (2x + 3) \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \sin (2x + 3) \cdot (2x + 3)' \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin (2x + 3) \cdot d(2x + 3) = -\frac{1}{2} \cos (2x + 3) + C.$$

(VII) $$\int \cos u \, du = \sin u + C.$$

1) $$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 \cdot (x^2)' \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \cdot du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin x^2 + C.$$

2) $$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int \cos \sqrt{x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' \, dx =$$

$$= 2 \int \cos \sqrt{x} \, d\sqrt{x} = 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

(VIII) $$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 3x} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{\cos^2 3x} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 3x} \, d(3x) =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 u} \, du = \frac{1}{3} \operatorname{tg} u + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C.$$

(IX) $$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$\int \frac{5x}{\sin^2 (3x^2 - 1)} \, dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{\sin^2 (3x^2 - 1)} \, dx = \frac{5}{6} \int \frac{(3x^2 - 1)'}{\sin^2 (3x^2 - 1)} \, dx =$$

$$= \frac{5}{6} \int \frac{1}{\sin^2 (3x^2 - 1)} \, d(3x^2 - 1) = -\frac{5}{6} \operatorname{ctg} (3x^2 - 1) + C.$$

(X) $$\int e^u \, \mathrm{d}u = e^u + C.$$

1) $$\int x e^{x^2-3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2-3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x^2-3} (x^2-3)' \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2-3} \, \mathrm{d}(x^2-3) = \frac{1}{2}\int e^u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + C.$$

2) $$\int \cos x \cdot e^{\sin x} \, \mathrm{d}x = \int e^{\sin x} . (\sin x)' \, \mathrm{d}x = \int e^{\sin x} \, \mathrm{d}(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

§ 4. PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI

În § 2, nr. 2, a fost demonstrată formula lui Leibniz-Newton :

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) \Big|_a^b$$

unde f este o funcţie continuă pe intervalul de integrare, iar F este o primitivă a lui f.

Să observăm că această formulă se poate obţine formal — din integrala nedefinită

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C$$

înlăturînd constanta de integrare şi scriind în ambii membri limitele de integrare a şi b :

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) \Big|_a^b$$

Folosind această formulă, vom deduce cîteva proprietăţi utile pentru calculul integralelor. Aceste proprietăţi (cu excepţia proprietăţii (V)) pot fi obţinute de asemenea folosind definiţia integralei (§ 2, nr. 1).

I. $$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$ (v. § 2, nr. 1)

II. $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$ (prin definiţie, v. § 2, nr. 1)

III. $$\boxed{\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Într-adevăr, din $\int f(x)\,dx = F(x)$, rezultă

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx = cF(x),$$

deci

$$\int_a^b cf(x)\,dx = cF(x)\Big|_a^b = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) =$$

$$= c\left(F(x)\Big|_a^b\right) = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

În particular, pentru $c = -1$ obţinem:

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x)\,dx =$$

$$= 2\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 2\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 2(1 - 0) = 2.$$

2) $$\int_2^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_2^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_2^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} = \ln\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

IV. $$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

Într-adevăr, din

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{şi} \quad \int g(x)\,dx = G(x)$$

deducem :

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x),$$

deci

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = [F(x) + G(x)]\Big|_a^b = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] =$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se demonstrează la fel că formula IV rămîne adevărată și pentru suma a n funcții :

$$\int_a^b (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1) $$\int_2^1 \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^1 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_2^1 x\,\mathrm{d}x + \int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_2^1 + \ln|x|\Big|_2^1 =$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{2^2}{2} + \ln 1 - \ln 2 = -\frac{3}{2} - \ln 2 = -\frac{3}{2} + \ln\frac{1}{2}.$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -3\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 3\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 + \operatorname{tg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 =$$

$$= 3\cos 0 - 3\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

V. $$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Într-adevăr, din

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$$

deducem:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx = F(x)\Big|_a^b + F(x)\Big|_b^c = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) =$$

$$= F(c) - F(a) = F(x)\Big|_a^c = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se demonstrează la fel formula următoare:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_n} f(x)dx.$$

Nu este necesar ca punctele $a_1, a_2, \dots, a_n$ să se succeadă în ordine crescătoare sau descrescătoare.

1) $$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2;$$

$$\int_2^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2};$$

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^2 x\,dx + \int_2^1 x\,dx = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Am verificat pe acest exemplu formula V.

2) $$\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx = -\int_{-1}^0 x\,dx + \int_0^2 x\,dx =$$

$$= \int_0^{-1} x\,dx + \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{-1} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

3) $$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left[\frac{4}{2} - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

§ 5. METODE DE INTEGRARE

Formula lui Leibniz-Newton permite calculul integralei oricărei funcţii continue căreia îi cunoaştem o primitivă.

Pentru funcţiile cărora nu le cunoaştem primitivele se pot folosi uneori două procedee, numite — în mod obişnuit — metode de integrare şi anume: integrarea prin părţi şi schimbarea de variabilă.

Aceste metode reduc calculul integralei unei funcţii la acela al integralei altei funcţii.

1. Integrarea prin părţi

Metoda de integrare prin părţi este dată de următoarea

T e o r e m ă. Dacă u şi v sînt două funcţii cu derivate continue pe un interval (a, b), atunci

$$\boxed{\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,\mathrm{d}x}$$

Într-adevăr,

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b .$$

Dar:

$$(uv)' = uv' + vu'$$

şi deci:

$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = \int_a^b (uv' + vu')\mathrm{d}x = \int_a^b uv'\mathrm{d}x + \int_a^b vu'\,\mathrm{d}x.$$

Urmează:

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b uv'\mathrm{d}x + \int_a^b vu'\,\mathrm{d}x,$$

de unde:

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x.$$

Această egalitate se numește *formula de integrare prin părți*. Ea reduce calculul integralei $\int_a^b uv'\,dx$ la cel al integralei $\int_a^b vu'\,dx$. Dacă se cunoaște o primitivă a funcției vu' atunci putem calcula integrala din membrul drept al formulei, deci rezultă și integrala din membrul stîng.

Deoarece $v'\,dx = dv$ și $u'\,dx = du$, formula de integrare prin părți se poate scrie sub forma următoare:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

care se folosește mai ușor în aplicații.

Observații. 1° Pentru a aplica unei integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ metoda de integrare prin părți, trebuie să alegem două funcții u și v, astfel ca $f(x)\,dx = u\,dv$ și ca $\int v\,du$ să fie mai simplă decît $\int u\,dv$. O alegere judicioasă a funcțiilor u și v se poate realiza în urma rezolvării unui număr mai mare de exerciții.

2° Uneori, pentru a se ajunge la o integrală cunoscută, este necesar să se aplice de mai multe ori metoda de integrare prin părți.

Exemple:

1. *Să se calculeze* $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Se alege $u = x$, $\quad dv = e^x dx$;

deci: $\quad du = dx \quad v = e^x$.

Atunci:

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 u dv = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v du = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

Să observăm că dacă am alege

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx,$$

am avea

$$du = e^x dx, \qquad v = \frac{x^2}{2}.$$

și deci:

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 e^x x\,dx = \int_0^1 u\,dv = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \frac{x^2}{2}e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}e^x\,dx.$$

Am ajunge astfel la o integrală mai complicată.

2) *Să se calculeze integrala* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$.

Se alege

$$u = x^2, \qquad dv = \sin x \, dx,$$

deci :

$$du = 2x \, dx, \qquad v = -\cos x.$$

Atunci :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \, dv = uv \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, du =$$

$$= -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2J,$$

deoarece $x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Pentru calculul integralei $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ se mai aplică o dată formula de integrare prin părți :

$$u = x, \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx, \qquad v = \sin x;$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \, dv = uv \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, du =$$

$$= x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Rezultă :

$$I = 2J = \pi - 2,$$

adică:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2.$$

3) *Să se calculeze* $\int_1^e \ln x \, dx$.

Să punem

$$u = \ln x, \qquad dv = dx,$$

de unde:

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x.$$

Avem:

$$\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e u \, dv = uv \Big|_1^e - \int_1^e v \, du = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = (e \ln e - \ln 1) - (e - 1) = e - e + 1 = 1.$$

4) *Să se calculeze* $\int_{-1}^1 \operatorname{arctg} x \, dx$.

Să punem

$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad dv = dx;$$

de unde:

$$du = \frac{1}{1 + x^2} dx, \qquad v = x.$$

Avem:

$$\int_{-1}^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \int_{-1}^1 u \, dv = uv \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v \, du = x \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$= 1 \cdot \operatorname{arctg} 1 - (-1) \operatorname{arctg} (-1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} (-1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \left(- \frac{\pi}{4} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} d(1 + x^2) = - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) \Big|_{-1}^1 = - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 2) = 0.$$

19—968

2. **Schimbarea de variabilă** (integrarea funcţiilor compuse)

Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă este dată de următoarea

Teoremă. Dacă $u(x)$ este o funcţie cu derivată continuă pe un interval $[a, b]$ şi dacă $f(t)$ este o funcţie continuă pe intervalul cu extremităţile $u(a)$ şi $u(b)$, atunci

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt.$$

Într-adevăr, dacă $\int f(t)\,dt = F(t)$, atunci

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)) = F(u(x))\Big|_a^b = \int_a^b dF(u(x)) =$$
$$= \int_a^b F'(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx.$$

Egalitatea din enunţul teoremei se numeşte *formula schimbării de variabilă*. Ea reduce calculul uneia din cele două integrale la calculul celeilalte.

Deoarece $du(x) = u'(x)\,dx$, formula aceasta se scrie sub forma:

$$\int_a^b f(u(x))\,du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

mai uşor de folosit în aplicaţii.

Se observă că integrala din membrul drept se obţine din cea din membrul stîng, făcînd înlocuirile

$$u(x) = t, \qquad du(x) = dt;$$

limitele integralei din membrul drept, $u(a) = t_1$ şi $u(b) = t_2$, se obţin din egalitatea $u(x) = t$, înlocuind pe x respectiv cu limitele a şi b ale integralei din membrul stîng.

Exemple:

1) *Să se calculeze* $\int_0^1 (5x + 4)^{31}\,dx.$

Se face înlocuirea (schimbarea de variabilă):

$$5x + 4 = t.$$

Prin diferenţiere se obţine

$$5\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{d}t.$$

Pentru $x = 0$ avem $t = 5 \cdot 0 + 4 = 4$; pentru $x = 1$, avem $t = 5 \cdot 1 + 4 = 9$. Aşadar:

$$\int_0^1 (5x+4)^{31}\,\mathrm{d}x = \int_4^9 t^{31}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int_4^9 t^{31}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\,\frac{t^{32}}{32}\Bigg|_4^9 = \frac{1}{160}(9^{32} - 4^{32}).$$

Integrala se poate efectua direct, ştiind că:

$$\int (5x+4)^{31}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{160}(5x+4)^{32}.$$

2) *Să se calculeze* $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Să punem:

$$x = \sqrt{3}\,t, \text{ de unde } \mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}t.$$

Pentru $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avem $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,t$, deci $t = \frac{1}{2}$.

Pentru $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ avem $\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}\,t$, deci $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aşadar:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3 - 3t^2}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1 - t^2}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t\,\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

3) *Să se calculeze* $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

Să punem:

$$\sqrt{x} = u, \text{ deci } x = u^2, \text{ de unde } dx = 2u du.$$

Pentru $x = 1$, $u = \sqrt{1} = 1$;

Pentru $x = 4$, $u = \sqrt{4} = 2$.

Avem deci:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{e^u}{u} 2u\, du = 2\int_1^2 e^u\, du = 2e^u \Big|_1^2 = 2(e^2 - e).$$

4) *Să se calculeze integrala* $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx$.

Să punem $x = 2y$, de unde $dx = 2\,dy$.

Pentru $x = 0$ avem $0 = 2y$, deci $y = 0$.

Pentru $x = 2$ avem $2 = 2y$, deci $y = 1$.

Avem deci:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \int_0^1 \frac{1}{4y^2+4} 2\,dy = \int_0^1 \frac{1}{4(y^2+1)} 2\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2(y^2+1)} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

5) *Să se calculeze* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx$.

Să punem $\sin x = z$, de unde $\cos x\, dx = dz$.

Pentru $x = 0$ avem $\sin 0 = z$, deci $z = 0$.

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ avem $\sin \frac{\pi}{2} = z$, deci $z = 1$.

Avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx = \int_0^1 z\, dz = \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

§ 6. APLICAŢII ALE INTEGRALEI LA GEOMETRIE ŞI FIZICĂ

1. Aria suprafeţelor plane

Fie f o funcţie continuă şi *pozitivă* pe un interval $[a, b]$. Graficul său este situat deasupra axei Ox (fig. 155).

Integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ reprezintă aria suprafeţei $abBA$, mărginită de axa Ox, curba $y = f(x)$ (graficul funcţiei f) şi dreptele $x = a$, $x = b$.

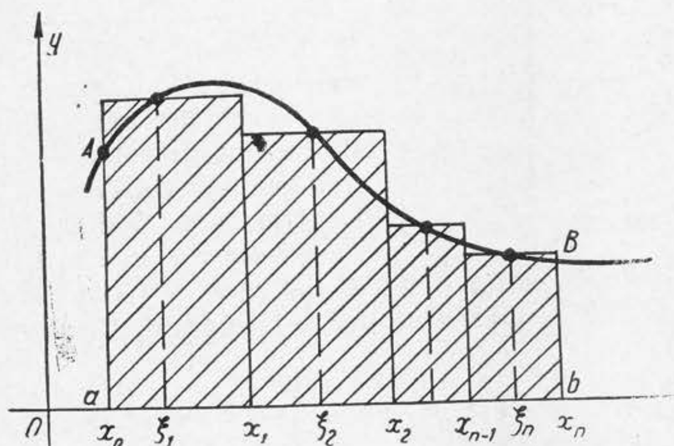


Fig. 155

Într-adevăr, să împărţim intervalul $[a, b]$ în n intervale parţiale egale, prin punctele de diviziune: $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = b$ şi să alegem în fiecare interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$ un punct ξ_i. Produsul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ reprezintă aria dreptunghiului cu baza pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ şi înălţimea $f(\xi_i)$, iar suma integrală

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1})$$

reprezintă aria poligonului haşurat în figura 155 format cu cele n dreptunghiuri. Acest poligon diferă de suprafaţa $abBA$ cu atît mai puţin, cu cît numărul n al dreptunghiurilor este mai mare (şi cu cît suprafaţa fiecărui

dreptunghi este mai mică). Este, deci, natural să luăm ca arie a suprafeței $abBA$ un număr S, de care S_n să difere cu atît mai puțin cu cît n este mai mare.

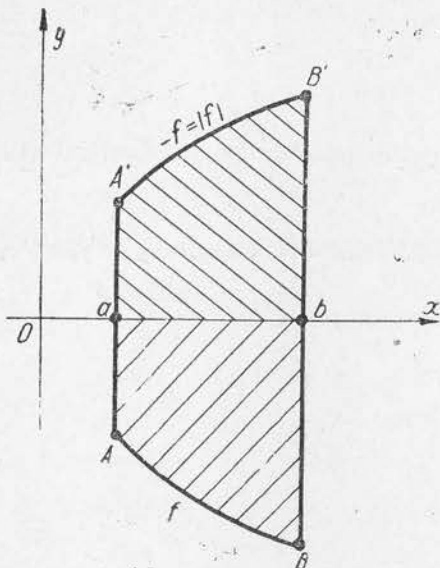


Fig. 156

Acest număr este $\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

De aceea, prin definiție, *aria S a suprafeței abBA este egală cu integrala* $\int_a^b f(x)\,dx$

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observație. Dacă funcția f este negativă, $f(x) \leqslant 0$, atunci graficul său este situat sub axa Ox (fig. 156). Graficul funcției opuse, $-f$, este situat deasupra axei Ox, deoarece $-f(x) = |f(x)| \geqslant 0$. Graficele celor două funcții sînt simetrice față de axa Ox, deci ariile suprafețelor $abBA$ și $abB'A'$ sînt egale. Dar aria S a suprafeței $abB'A'$, determinată de funcția *pozitivă* $-f = |f|$, este egală cu integrala acestei funcții:

$$S = \int_a^b (-f(x))\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Rezultă că aria S a suprafeței $abBA$, determinată de funcția *negativă* f, este egală cu integrala modulului acestei funcții:

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right|$$

Această egalitate este adevărată și în cazul unei funcții pozitive, $f(x) \geqslant 0$, deoarece, în acest caz, $|f(x)| = f(x)$.

Egalitatea rămîne adevărată și în cazul unei funcții al cărei grafic traversează axa Ox. Să verificăm această afirmație pe cazul prezentat în fig. 157.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^d |f(x)|\,dx + \int_d^b |f(x)|\,dx = \int_a^d |f(x)|\,dx.$$

Exemple:

1) Aria triunghiului mărginit de axa Ox, dreapta $y = 2x$ și dreapta $x = a$ (fig. 158), este $S = \int_0^a 2x\,dx = x^2 \Big|_0^a = a^2$.

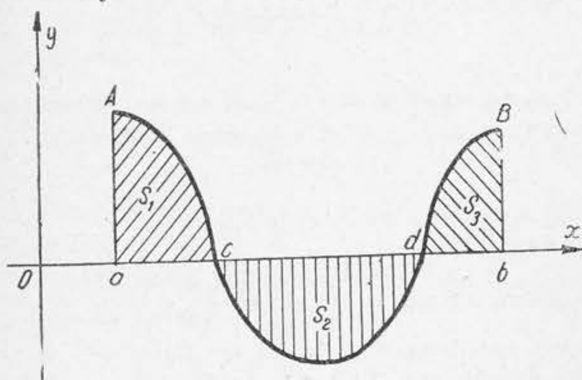


Fig. 157

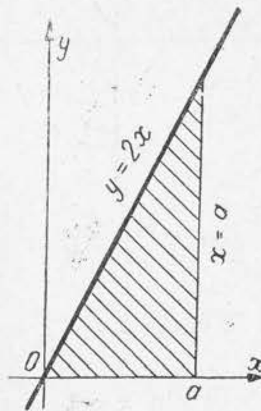


Fig. 158

Am regăsit rezultatul obținut în § 1, nr. 1.

2) Aria suprafeței mărginite de dreptele: $y = 0$ (axa Ox), $y = 3x - 1$, $x = 1$ și $x = 2$ (fig. 159) este:

$$S = \int_1^2 (3x - 1)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(3 \cdot \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) =$$

$$= (6 - 2) - \left(\frac{3}{2} - 1\right) =$$

$$= 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Se poate verifica acest rezultat, folosind formula ariei unui trapez.

3) Aria suprafeței mărginite de axa Ox, parabola $y = x^2$ și dreapta $x = a$ (fig. 160) este

$$S = \int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Am regăsit rezultatul obținut în § 1, nr. 2.

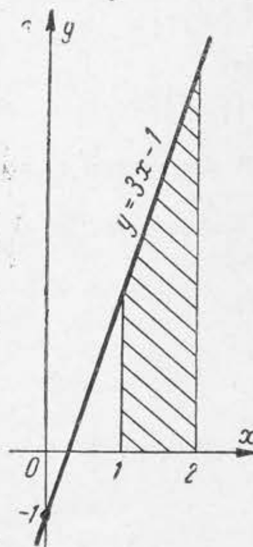


Fig. 159

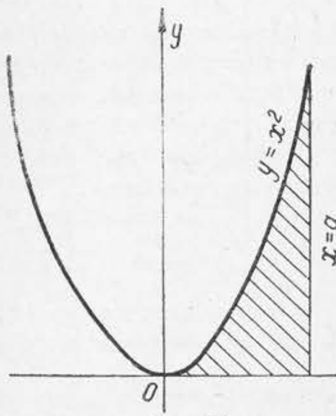


Fig. 160

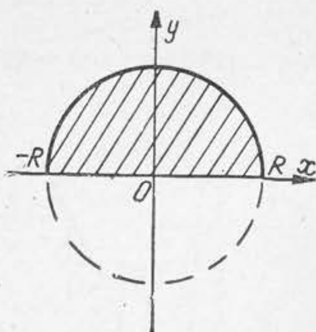


Fig. 161

4) Ecuaţia cercului cu centrul în origine şi raza R este $x^2 + y^2 = R^2$. Semicercul superior are ecuaţia

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{(fig. 161)}.$$

Aria semicercului este:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Pentru calculul acestei integrale se face schimbarea de variabilă:

$$x = R \sin t,$$

deci

$$dx = R \cos t\, dt.$$

Pentru $x = -R$ avem $-R = R \sin t$, deci $\sin t = -1$ şi $t = -\frac{\pi}{2}$.

Pentru $x = R$ avem $R = R \sin t$, deci $\sin t = 1$ şi $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}\, R \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, R^2 \cos t\, dt =$$

$$= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = R^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= R^2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin \pi - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin(-\pi)\right] = R^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Aria cercului este deci πR^2. Am verificat pe această cale un rezultat cunoscut din geometrie.

5) Să se calculeze aria suprafeţei mărginite de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x$ (fig. 162).

Aflăm mai întîi punctele de intersecţie ale celor două curbe, rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Se obţin punctele (0,0) şi (2,4). Aria suprafeţei mărginite de axa Ox, dreapta $y = 2x$ şi dreapta $x = 2$ este dată de integrala $\int_0^2 2x\, dx$, iar aria suprafeţei mărginite de axa Ox, para-

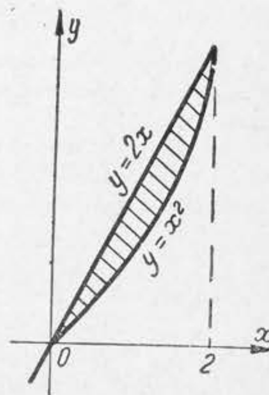


Fig. 162

bola $y = x^2$ și dreapta $x = 2$, este dată de integrala $\int_0^2 x^2\,dx$. Aria căutată este dată de diferența celor două arii:

$$S = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Volumul corpurilor de rotație

Volumele unor corpuri simple, cum sînt prisma sau piramida, se cunosc din geometrie.

Volumul unui poliedru se poate afla descompunînd poliedrul în piramide și însumînd volumele acestora.

În geometrie s-a calculat de asemenea volumul cilindrului, ca limită a șirului volumelor unor prisme care au ca baze poligoane regulate înscrise în cercul de bază al cilindrului. Dacă R și I sînt respectiv raza și înălțimea cilindrului, volumul său este

$$V = \pi R^2 I.$$

Urmînd un procedeu analog, de aproximare cu poliedre sau cilindri, se poate defini volumul și pentru alte corpuri.

În acest număr va fi definit volumul unui corp de rotație obținut prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei axe din planul său.

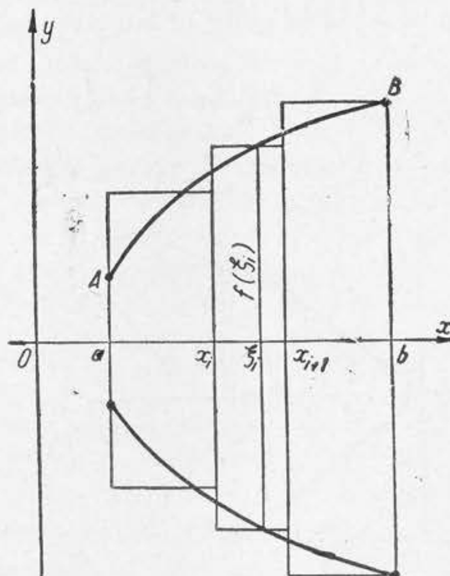


Fig. 163

Fie $y = f(x)$ ecuația unei curbe plane, $f(x)$ fiind o funcție continuă și pozitivă pe un interval $[a, b]$ (fig. 163). Prin rotirea trapezului curbiliniu $abBA$ în jurul axei Ox ia naștere un corp de rotație.

Să împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale egale, prin punctele de diviziune

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b.$$

În fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ să alegem un punct ξ_i și să considerăm dreptunghiul cu baza pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ și cu înălțimea $f(\xi_i)$.

Prin rotirea acestui dreptunghi în jurul axei Ox ia naștere un cilindru cu raza $f(\xi_i)$ și înălțimea $x_i - x_{i-1}$. Volumul său este

$$\pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Volumul V_n al corpului format din cei n cilindri este egal cu suma volumelor acestora:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Corpul format din cei n cilindri diferă de corpul de rotație generat de suprafața $abBA$ cu atît mai puțin, cu cît numărul n al cilindrilor este mai mare (și cu cît volumul fiecăruia este mai mic). Este deci natural să luăm drept volum al corpului de rotație considerat un număr V, de care V_i să difere cu atît mai puțin cu cît i este mai mare.

Să observăm că, notînd $h(x) = \pi f^2(x)$, V_n se scrie astfel

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

deci V_n este o sumă integrală a funcției h, iar limita șirului (V_n) al sumelor integrale este egală cu integrala funcției h:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Prin definiție, se ia $V = \lim_{n\to\infty} V_n$, adică:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

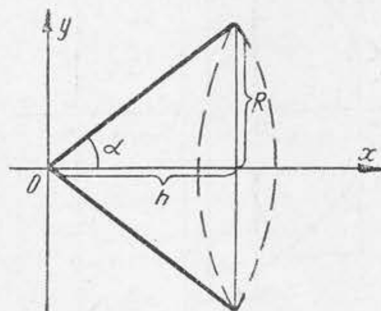


Fig. 164

Exemple:

1) Să considerăm un con circular drept de rază R și înălțime h. Conul se obține prin rotirea unei generatoare OA în jurul axei Ox a conului (fig. 164). Dacă notăm cu α unghiul format de generatoare cu înălțimea, obținem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{h}$, deci ecuația dreptei OA este

$$y = \frac{R}{h}x.$$

Volumul conului este deci

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

2) O sferă de rază R se obține prin rotirea unui semicerc în jurul diametrului său. Dacă alegem originea în centrul semicercului și axa Ox de-a lungul diametrului (fig. 165), ecuația semicercului este:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Volumul sferei este deci:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

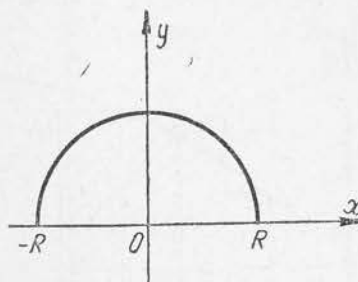


Fig. 165

3. Centrul de greutate al suprafețelor plane

După cum se știe din fizică, pentru unele suprafețe simple centrul de greutate poate fi determinat ușor.

Dacă o suprafață are o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă. Dreptunghiurile și romburile au două axe de simetrie, deci centrul de greutate se află la intersecția acestor axe.

Centrul de greutate al triunghiurilor se află la intersecția medianelor.

Fie acum un sistem de n suprafețe cărora le cunoaștem coordonatele centrelor de greutate (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) în raport cu un sistem de axe de coordonate. Dacă suprafețele au respectiv ariile $s_1, s_2, \ldots, s_n$, atunci coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate al sistemului sînt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}; \quad y_G = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_n y_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$$

Să considerăm o funcție pozitivă și continuă f definită pe un interval închis $[a, b]$ și să considerăm suprafața plană $abBA$ mărginită de axa Ox, graficul funcției f (curba $y = f(x)$) și dreptele $x = a$, $x = b$ (fig. 166). Ne propunem să definim centrul de greutate al acestei suprafețe. Pentru aceasta, să împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale egale, prin punctele de diviziune:

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b.$$

În fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ să alegem punctul ξ_i la *mijlocul* acestui interval și să considerăm dreptunghiul cu baza pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ și înălțimea $f(\xi_i)$. Aria sa este

$$s_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

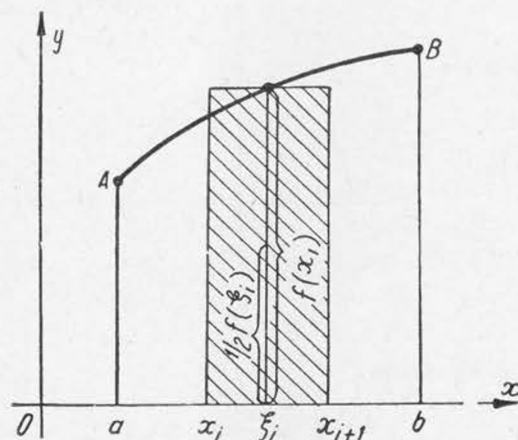


Fig. 166

iar coordonatele centrului său de greutate sînt $\left(\xi_i, \frac{1}{2} f(\xi_i)\right)$. Pentru sistemul celor n dreptunghiuri, coordonatele centrului de greutate sînt deci:

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})};$$

$$\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}.$$

Observăm că la numitor se află suma integrală a funcției $f(x)$, iar la numărător se află respectiv sumele integrale ale funcțiilor $xf(x)$ și $\frac{1}{2} f^2(x)$. Sumele integrale tind respectiv către integralele $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b xf(x)\,dx$, $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx$ și deci rapoartele de mai sus tind respectiv către rapoartele integralelor corespunzătoare: $\dfrac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ și $\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$.

Prin definiție, aceste rapoarte sînt coordonatele x și y ale centrului de greutate al figurii $abBA$:

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}; \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemple:

1) Să se afle centrul de greutate al figurii mărginite de parabola $y^2 = x$ şi dreapta $x = 1$ (fig. 167). Deoarece figura are axa Ox ca axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă, deci $y_G = 0$. Rămîne de calculat x_G. Din motive de simetrie, abscisa x_1 a centrului de greutate al părţii de deasupra axei Ox şi abscisa x_2 a centrului de greutate al părţii de sub axa Ox sînt egale; de asemenea ariile s_1 şi s_2 ale celor două părţi sînt egale, deci:

$$x_G = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{s_1 + s_2} = \frac{x_1 s_1 + x_1 s_1}{s_1 + s_1} = x_1.$$

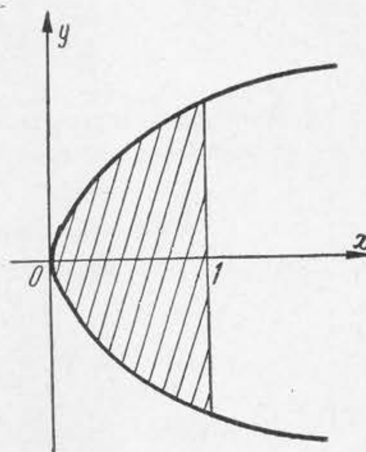


Fig. 167

Aşadar:

$$x_G = x_1 = \frac{\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{x}\,dx}.$$

Dar:

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

şi:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

astfel încît

$$x_G = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

2) Să se afle centrul de greutate al figurii mărginite de parabolele $y = x^2$ şi $y^2 = x$ (fig. 168.

Punctele de intersecţie ale celor două curbe sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x. \end{cases}$$

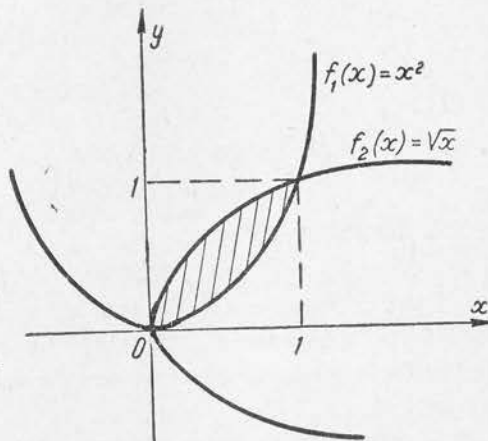


Fig. 168

Ele sînt (0,0) şi (1,1). Cele două curbe sînt respectiv graficele funcţiilor $f_1(x) = x^2$ şi $f_2(x) = \sqrt{x}$. Atunci :

$$x_G = \frac{\int_0^1 x f_2(x)\,dx - \int_0^1 x f_1(x)\,dx}{\int_0^1 f_2(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}.$$

Datorită faptului că prima bisectoare este axă de simetrie a figurii, centrul de greutate se află pe această axă, deci $y_G = x_G$.

$$\int_0^1 x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \int_0^1 x[\sqrt{x} - x^2]\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Deci :

$$y_G = x_G = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

4. Lucrul mecanic

Dacă un corp se deplasează pe o dreaptă, cu distanţa d, sub acţiunea unei forţe constante F, dirijate de-a lungul dreptei, atunci produsul Fd dintre forţă şi deplasare se numeşte *lucru mecanic* efectuat de forţa F pe distanţa d.

Să presupunem acum că mobilul se deplasează pe axa Ox, de la a la b sub acţiunea unei forţe $F(x)$, care este o funcţie continuă de x. Să definim

şi în acest caz ce se înţelege prin lucru mecanic efectuat de forţa $F(x)$ de la a la b. Pentru aceasta, să împărţim intervalul $[a, b]$ în n părţi egale (fig. 169), prin punctele de diviziune

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b.$$

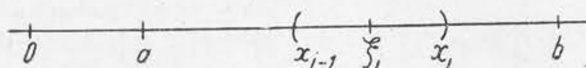


Fig. 169

În fiecare interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$ să alegem un punct ξ_i şi să considerăm produsul

$$F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Acest număr este egal cu lucrul mecanic efectuat pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ de o forţă constantă, egală cu $F(\xi_i)$. Suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

reprezintă lucrul mecanic total efectuat de diferitele forţe constante $F(\xi_i)$ pe intervalele corespunzătoare (x_{i-1}, x_i). Observăm că suma aceasta este suma integrală a funcţiei $F(x)$. Sumele integrale tind către integrala $\int_a^b F(x)\,dx$ care este, prin definiţie, lucrul mecanic L efectuat de forţa $F(x)$ de la a la b:

$$\boxed{L = \int_a^b F(x)\,dx.}$$

Exemple:

1) Un corp este atras de un resort, fixat cu un capăt într-un punct O, cu o forţă proporţională cu distanţa de la poziţia corpului la punctul O. Să se afle lucrul mecanic efectuat cînd corpul se deplasează sub acţiunea forţei de la b la a (fig. 170).

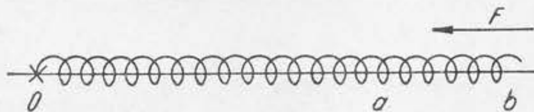


Fig. 170

Avem $F(x) = -kx$ unde $k > 0$ este un coeficient de proporţionalitate. Am luat forţa cu semnul —, deoarece ea este dirijată în sensul negativ al axei Ox. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_b^a F(x)\,dx = -\int_b^a kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Bigg|_b^a = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

2) Să considerăm un vas cilindric închis la un capăt şi în care se află un gaz sub presiune (fig. 171). La celălalt capăt al cilindrului se află un piston. Să se afle lucrul mecanic efectuat de forţa de presiune a gazului prin deplasarea pistonului, ştiind că volumul gazului creşte de la V_0 la V_1, temperatura rămînînd constantă.

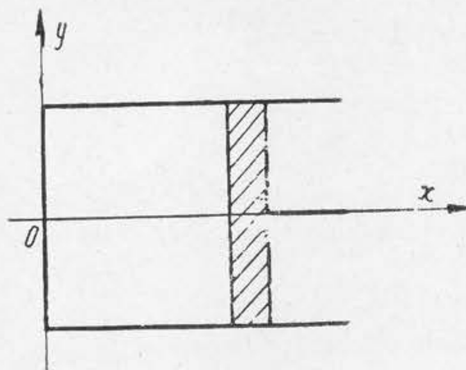


Fig. 171

Pentru aceasta, să notăm cu S aria bazei cilindrului. Conform legii Boyle-Mariotte, între presiunea p şi volumul V există relaţia

$$pV = k = \text{const.},$$

deci $p = \frac{k}{V}$. Forţa F de apăsare a gazului este egală cu produsul pS dintre presiune şi suprafaţă

$$F = pS = \frac{kS}{V}.$$

Dacă alegem un sistem de axe ortogonale, ca în figura 171, şi dacă notăm cu x distanţa dintre piston şi celălalt capăt al cilindrului, atunci volumul V este funcţie de x:

$$V(x) = Sx$$

şi, deci, şi forţa F este funcţie de x:

$$F(x) = \frac{kS}{V(x)}.$$

Să notăm cu x_0 şi x_1 poziţiile pistonului înainte şi după deplasare:

$$V_0 = Sx_0, \quad V_1 = Sx_1.$$

Atunci, lucrul mecanic efectuat este:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{kS}{V(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Să facem înlocuirea $V = V(x) = Sx$, deci $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$.

Pentru $x = x_0$ avem $V_0 = Sx_0$ şi pentru $x = x_1$ avem $V_1 = Sx_1$;

deci:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \frac{kS}{V(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,\mathrm{d}V = k \ln V \Big|_{V_0}^{V_1} = k(\ln V_1 - \ln V_0) = k \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

EXERCIŢII

Urmînd procedeul expus în § 1, să se calculeze ariile suprafeţelor delimitate după cum urmează:

1. Graficul funcţiei $f(x) = x^2 - x$, axa Ox, dreptele $x = 1$, $x = 2$.
2. Graficul funcţiei $f(x) = x^3$, axa Ox, dreapta $x = 2$.

Aplicînd direct definiţia integralei de la § 2, să se demonstreze egalităţile :

3. $\int_a^b C\,\mathrm{d}x = C\,(b-a)$ ($a < b$, C număr real oarecare).

4. $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0.$ 5. $\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = 0.$ 6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$

7. $\int_{-a}^{0} \cos x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \cos x\,\mathrm{d}x$ (a număr real oarecare).

Aplicînd formula Leibniz-Newton, să se calculeze următoarele integrale :

8. $\int_0^1 (3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x.$ 9. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$ 10. $\int_0^{-1} e^x\,\mathrm{d}x.$

11. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$ 12. $\int_e^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$ 13. $\int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Să se verifice prin derivare următoarele egalităţi (funcţiile respective se consideră definite pe un interval) :

14. $\int \frac{2}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x+1}{x+3} + C.$ 15. $\int \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} + C.$

16. $\int -2\,(\sin 2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \cos 2x - 2\sin x + C.$

17. $\int \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln C\,\frac{x^2-1}{x^2+1}.$

Să se calculeze următoarele integrale nedefinite (funcţiile respective se consideră definite pe un interval) :

18. $\int (8x^3 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x.$ 19. $\int (2x^5 - 3x^4 + 3x^2 + x - 4)\mathrm{d}x.$

20. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 5\right)\mathrm{d}x.$ 21. $\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5}\,\mathrm{d}x.$

22. $\int (\sqrt{x} + 1)\mathrm{d}x.$ 23. $\int (x\sqrt{x} - 2x + 3)\mathrm{d}x.$

24. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$

25. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

26. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

27. $\int \left(5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x.$

28. $\int (2x - 1)^7\,\mathrm{d}x.$

29. $\int (3 + 4x)^5\,\mathrm{d}x.$

30. $\int \left(1 - \frac{3x}{7}\right)^9 \mathrm{d}x.$

31. $\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

32. $\int \frac{3}{2\sqrt{5 - 4x}}\,\mathrm{d}x.$

33. $\int \frac{4x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,\mathrm{d}x.$

34. $\int \frac{1}{5x}\,\mathrm{d}x.$

35. $\int \frac{1}{2 - x}\,\mathrm{d}x.$

36. $\int \frac{2}{3x + 5}\,\mathrm{d}x.$

37. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}\,\mathrm{d}x.$

38. $\int \frac{5x^2}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x.$

39. $\int \frac{4}{\sqrt{1 - 2x^2}}\,\mathrm{d}x.$

40. $\int \frac{2}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}}\,\mathrm{d}x.$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{7 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$

42. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - (x^2 - 2x + 3)^2}}\,\mathrm{d}x.$

43. $\int \frac{1}{1 + 16x^2}\,\mathrm{d}x.$

44. $\int \frac{3}{1 + 7x^2}\,\mathrm{d}x.$

45. $\int \frac{1}{5 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

46. $\int \frac{x}{1 + (x^2 - 3)^2}\,\mathrm{d}x.$

47. $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x.$

48. $\int \sin\left(2 - \frac{1}{7}x\right)\mathrm{d}x.$

49. $\int (x - 1)\sin(x^2 - 2x - 3)\,\mathrm{d}x.$

50. $\int 7x^2 \cos(x^3 + 1)\,\mathrm{d}x.$

51. $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x.$

52. $\int \cos^5 x \sin x\,\mathrm{d}x.$

53. $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x.$

54. $\int \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$

55. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

56. $\int \frac{3}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x.$

57. $\int \frac{5(x + 1)}{\sin^2(x^2 + 2x)}\,\mathrm{d}x.$

58. $\int e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x.$

59. $\int e^{-x+4}\,\mathrm{d}x.$

60. $\int xe^{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

61. $\int a^{3x}\,\mathrm{d}x.$

62. $\int (x+1)\,a^{x^2+2x-5}\,\mathrm{d}x.$

Să se determine, prin condiția indicată, primitiva F a fiecăreia dintre următoarele funcții f (f definită pe un interval).

63. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1;\quad F(1) = 2.$

64. $f(x) = \frac{3(x-1)}{x^2-2x};\quad F(-1) = 0.$

65. $f(x) = 2x^3 \cos\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right);\quad F(0) = 3.$

66. $f(x) = \frac{5x^2}{1+x^6};\quad F(1) = \pi.$

Să se calculeze următoarele integrale:

67. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x.$

68. $\int_{1}^{2} \frac{t^2 - t^3 + 1}{t^5}\,\mathrm{d}t.$

69. $\int_{1}^{0} (x\sqrt[5]{x} + x^2)\,\mathrm{d}x.$

70. $\int_{1}^{3} \left(2\sqrt[3]{u} - \frac{5}{u} + 3e^u + \frac{4}{u^2}\right)\mathrm{d}u.$

71. $\int_{0}^{1} \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$

72. $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

73. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x.$

74. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha\,\mathrm{d}\alpha.$

75. $\int_{-1}^{1} t^2 e^{t^3+1}\,\mathrm{d}t.$

76. $\int_{0}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{1}{9+2x^2}\,\mathrm{d}x.$

77. $\int_{0}^{\frac{a}{b}} \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,\mathrm{d}x.$

78. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$

Să se calculeze următoarele integrale:

79. $\int_{-\frac{1}{2}}^{5} | x^2 - 1 | \, dx.$

80. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} | \sin x | \, dx.$

81. $\int_{-1}^{2} f(x) \, dx$, unde $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{pentru } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x + 1, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

82. $\int_{3}^{-2} f(x) \, dx$, unde $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{pentru } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{pentru } 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

83. $\int_{-e^2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) \, dx$, unde $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x}, & \text{pentru } -e^2 \leqslant x \leqslant -1 \\ \frac{1}{1 + x^2}, & \text{pentru } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Să se calculeze prin părţi următoarele integrale:

84. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \, dx.$

85. $\int_{0}^{\frac{1}{4}} \arcsin 2x \, dx.$

86. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$

87. $\int_{e}^{1} (t - 3) \ln t \, dt.$

88. $\int_{1}^{0} x \operatorname{arctg} x \, dx.$

89. $\int_{0}^{1} \ln (1 + x^2) \, dx.$

90. $\int_{1}^{-1} x^2 e^x \, dx.$

91. $\int_{0}^{\pi} e^{-2\alpha} \cos 3\alpha \, d\alpha.$

92] $\int_{1}^{2} t^2 (\ln t)^2 \, dt.$

Să se calculeze prin substituţie următoarele integrale:

93. $\int_{0}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx.$

94. $\int_{0}^{1} \sin (a^x) \, a^x \, dx.$

95. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx.$

96. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} \, dx.$

97. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx.$

98. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} \, dx.$

99. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2} \, dx.$

100. $\int_{1}^{2} \frac{x}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} \, dx.$

101. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} \, dx.$

102. $\int_{0}^{a} \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \, dx.$

În exercițiile următoare să se calculeze ariile suprafețelor delimitate de curbele specificate în fiecare caz în parte:

103. $y^2 = 2x, \; x = 2.$

104. $y^2 = x, \; y = x^2.$

105. $y = x^3, \; y = x.$

106. $xy = 4, \; y = 0, \; x = 2, \; x = 4.$

107. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

108. $x^2 + y^2 = 16, \; y^2 = 6x.$

109. $y = e^x, \; y = 0, \; x = 0, \; x = 1.$

110. $y = \ln x, \; y = 0, \; x = a, \; x = b \; (1 \leqslant a \leqslant b).$

111. $y = x\sqrt{1-x^2}, \; y = 0, \; x = 1.$

În exercițiile următoare să se calculeze volumele corpurilor formate prin rotația în jurul axei Ox a suprafețelor delimitate de curbele specificate în fiecare caz în parte:

112. $y = 3x^2, \; y = 2x.$

113. $y = x^3, \; y = x^2.$

114. $y = \sin x, \; y = 0, \; x = 0, \; x = \frac{\pi}{2}.$

115. $y = \operatorname{tg} x, \; y = 0, \; x = 0, \; x = \frac{\pi}{4}.$

116. $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}, \; y = 0, \; x = \frac{1}{2}.$

117. $y = xe^x, \; y = 0, \; x = 1.$

Să se determine centrul de greutate al fiecăreia dintre suprafețele următoare:

118. Suprafața delimitată de $y = 0$ și de bucla sinusoidei $y = \sin x$ care corespunde la $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

119. Suprafaţa din primul cadran, ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), delimitată de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ şi de coarda care uneşte vîrfurile curbei situate pe direcţia pozitivă a axelor de coordonate.

120. Suprafaţa din primul cadran, delimitată de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ şi de cercul $x^2+y^2=a^2$.

121. Forţa F cu care o sarcină electrică e_1 atrage sarcina electrică e_2, de semn contrar lui e_1 şi situată la distanţa r de e_1, este dată de relaţia $F=k\frac{e_1e_2}{r^2}$ (k o constantă). Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a scurta distanţa dintre e_1 şi e_2 de la r' la r''.

122. Forţa necesară comprimării unui resort metalic este proporţională cu „turtirea" resortului în raport cu poziţia iniţială. Ştiind că la fiecare 2 cm comprimare forţa creşte cu 5 kgf, să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a comprima resortul cu 30 cm.

123. Un gaz este închis într-un cilindru cu piston mobil. Admiţînd că gazul se supune legii Boyle-Mariotte, $pV=k$, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz pentru împingerea pistonului, admiţînd că la momentul iniţial pistonul se găseşte la distanţa a de fundul cilindrului, iar la momentul final la distanţa b. Se presupune că aria bazei cilindrului este S.

124. Un corp se mişcă rectiliniu conform legii $s(t)=kt^3$. Ştiind că rezistenţa mediului este proporţională cu pătratul vitezei, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de rezistenţă cînd corpul se deplasează de la $s=0$ la $s=a$.

125. Adîncimea unui puţ de mină este de 400 m. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea ascensorului, ştiind că greutatea acestuia este de 2 000 kg, iar greutatea metrului de cablu de 2 kg.

EXERCIŢII SUPLIMENTARE

1. Să se cerceteze, discutînd în raport cu numerele reale α şi β, ($\beta \geqslant 0$), dacă şirul $a_n=\alpha^n\beta+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$ ($\alpha \neq 1$) are limită.

2. Pentru fiecare număr real x să notăm cu $[x]$ cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. ($[x] \leqslant x < [x]+1$). Să se construiască prin puncte graficele următoarelor funcţii :

a) $f(x)=[x]$; b) $f(x)=x-[x]$; c) $f(x)=[\sqrt{x}]$; d) $f(x)=[x^2]$.

3. Să se cerceteze, discutînd în raport cu numărul real α, dacă funcţia

$$f(x) = \frac{\alpha + \sin\frac{1}{x}}{x}$$

are limite laterale în punctul $x = 0$.

4. Considerînd rădăcinile ecuaţiei $ax^2 - 6x - 3 = 0$ ca funcţii de a, să se stabilească dacă aceste rădăcini au limită în $a = 0$.

5. Se dau funcţiile:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 2ax - a^2}{x^2 + 2ax - a^2} \quad \text{şi} \quad g(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \ (a \neq 0).$$

1° Să se demonstreze direct, fără a utiliza derivarea, că cele două funcţii diferă printr-o constantă.
2° Să se determine respectiva constantă.
3° Să se verifice rezultatul prin derivare.

6. Să se arate că funcţiile următoare verifică respectivele relaţii:
a) $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^r$; $(x^2 - 1) f'' + xf' = r^2 f$;
b) $f(x) = x^r [a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)]$;
$x^2 f'' + (1 - 2r) xf' + (1 + r^2) f = 0$ (a, b, r numere reale oarecare).

7. Se dă funcţia: $f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}$ (a, b, numere reale oarecare).
1° Să se arate că există două puncte ale graficului funcţiei în care tangenta este paralelă cu axa Ox şi că produsul absciselor acestor două puncte este -1.
2° Să se determine a şi b astfel încît $f(1) = 2$ şi $f'(2) = 0$.
3° Să se construiască graficul funcţiei astfel determinate.

8. Fiind dată parabola $y^2 = 2px$, $(p > 0)$, să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în segmentul de parabolă cu baza perpendiculară pe axa parabolei şi de săgeată h (se numeşte săgeată distanţa de la vîrful parabolei la baza segmentului).

9. Se grupează 60 elemente galvanice, fiecare cu forţa electromotoare e, rezistenţa interioară r şi rezistenţa exterioară R, în modul următor: cîte n elemente legate în serie formînd o baterie şi apoi m baterii, fiecare de cîte n elemente, legate în paralel. Cum trebuie alese numerele n şi m astfel încît intensitatea I a curentului furnizat de bateria unică compusă din cele 60 elemente să fie maximă? Aplicaţie: 1° $r = 1$ ohm, $R = 135$ ohmi; 2° $r = 1$, $R = 15$; 3° $r = 1$, $R = 2{,}5$.

10. Dintr-o localitate A, situată lîngă o cale ferată, se dirijează un transport de mărfuri spre o localitate B, situată la 9 km de calea ferată. Distanța de la A la proiecția lui B pe calea ferată fiind de 30 km, iar costul transportului unei tone de marfă pe distanța de 1 km fiind α pentru calea ferată și β pentru transportul cu autocamionul, ($\alpha < \beta$), să se determine punctul în care trebuie racordată cu calea ferată o șosea care începe din B astfel încît transportul mărfurilor să fie cît mai economic.

11. Curba de magnetizare a fierului este dată de formula $B = e^{\frac{H}{a + bH}}$ unde H este intensitatea cîmpului magnetic (măsurată în oerstezi), B inducția magnetică (măsurată în gaussi), a și b numere reale strict pozitive. Pentru ce valori ale lui H permeabilitatea magnetică $\mu(H) = \frac{B}{H}$ are valoare extremă?

12. Dintre conurile drepte înscrise într-o sferă de rază dată, R, să se determine: 1° cel de arie laterală maximă; 2° cel de volum maxim.

13. Se dă funcția. $f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d}$ (a, b, c, d numere reale).

1° Să se determine a, b, c, d astfel încît funcția să aibă pentru $x = -1$ un maxim egal cu 2, iar pentru $x = 1$ un minim egal cu 4.

2° Să se construiască graficul funcției astfel determinate.

14. Să se construiască graficele următoarelor funcții:

$$\text{a) } f(x) = e^{\frac{x^2-8}{x-3}}; \quad \text{b) } f(x) = \ln(1 + \sin x).$$

15. Aplicînd direct definiția integralei, să se calculeze integrala funcției $f(x) = e^{rx}$ între limitele a și b (r, a, b numere reale; $a < b$).

16. Să se demonstreze că:

a) dacă $f(x) = Ax + B$ atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

b) dacă $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

(formula celor trei nivele).

17. Se dă funcția $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d numere reale).

1° Să se determine a, b, c, d, astfel încît: $f(0-0) = -\infty$; dreapta $y = 2$ să fie asimptotă a graficului; în punctul de abscisă $x = -1$ tangenta la grafic să fie paralelă cu bisectoarea a doua.

2° Considerînd suprafața delimitată de graficul funcției astfel determinate, de axa Ox și de dreptele $x = 1$, $x = 3$, să se calculeze aria acestei suprafețe și volumul corpului format, rotind suprafața în jurul axei Ox.

18. Se consideră un curent alternativ a cărui intensitate este $I(t) = a \sin \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ ($a > 0$, $b > 0$, iar $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$ număr rațional). Notînd cu T perioada acestui curent, să se calculeze intensitatea eficace:

$$I_e = \left[\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

19. Un curent alternativ de intensitate $I(t) = a \sin \omega t$ trece printr-o rezistență constantă R. Să se calculeze consumul mediu de energie într-o secundă (adică puterea curentului), știind că într-o perioadă consumul de energie E este dat de integrala:

$$E = \int_0^T RI^2(t)\,dt.$$

20. Să se calculeze lucrul mecanic care trebuie efectuat pentru a ridica un corp de masă m la înălțimea h deasupra pămîntului, considerînd că raza pămîntului este R. Care este valoarea acestui lucru mecanic atunci cînd corpul se depărtează spre infinit?

SCURTĂ PRIVIRE ISTORICĂ

Apariția calculului diferențial și integral este strîns legată de dezvoltarea relațiilor sociale și economice determinate de progresul tehnic în toate ramurile activității omenești în cursul secolului al XVII-lea. Viața punea mereu noi probleme, în geometrie, în mecanică, în astronomie, probleme de un tip nou, care au atras imediat atenția celor mai mari învățați ai epocii.

Metodele pentru rezolvarea acestor noi probleme se conturau treptat, pe măsură ce studiul acestora se adîncea. Trăsăturile fundamentale ale acestor metode care constituiau, în fapt, baza teoretică a științei noi care lua naștere în acest mod n-au putut fi, totuși, recunoscute și înțelese decît după un număr mare de probleme noi rezolvate.

Pînă la sfîrșit, aceste probleme s-au găsit grupate în jurul a două mari probleme, pe care astăzi le numim problema derivării funcțiilor și problema integrării funcțiilor. La baza ambelor probleme se află noțiunea de funcție, adică de mărime a cărei variație este determinată de variația altei mărimi. La început, cel puțin la Newton, această ultimă mărime era timpul. Astfel, din punct de vedere filozofic, analiza matematică răspundea perfect schemei dialectice a cunoașterii naturii : studiul mărimilor în procesul variației lor și nu izolate, ci în strînsă interdependență.

Munca unui secol întreg, începînd cu Galileo Galilei care în 1604 dă fără demonstrație legea mișcării rectilinii uniform variate, continuînd cu Neper, care în 1614 introduce logaritmii, cu Fermat, care în jurul anului 1630 rezolvă probleme de maxim și determină tangente la clase noi de curbe, cu Cavalieri, care cam la aceeași epocă utilizează pentru calculul ariilor metode care revin, în limbajul actual, la calculul unei integrale, pornind de la însăși definiția sa[1], cu I. Gregory, care în 1667 calculează aria unui segment hiperbolic, cu Isaac Barrow, profesorul lui Isaac Newton, care ar fi putut fi fondatorul noii discipline, dacă nu ar fi fost preocupat exclusiv de aspectul geometric al problemelor tratate, această muncă de un secol capătă, în lucrările lui Newton și Leibniz, o formă nouă, care permite să se considere că o nouă disciplină matematică a luat ființă : *Calculul diferențial și integral.*

Acesta este motivul pentru care noi, astăzi, considerăm pe Newton și pe Leibniz ca fondatorii analizei matematice. Dar opera lor n-a constituit, după cum vedem, un fenomen neașteptat. Ea a fost pregătită și ușurată de munca unui secol întreg, de eforturi ale celor mai luminate minți, ea a constituit un corolar natural al dezvoltării societății în epoca respectivă.

Este bine ca cititorul să știe că notația dx pentru diferențială și semnul $\int$ au fost introduse de Leibniz. Newton, la rîndul său, preocupat de problemele de astronomie și de cinematică întrebuințează pentru derivata funcției f notația f (astăzi această notație este utilizată aproape exclusiv în mecanică, pentru funcțiile de timp).

---

[1] În antichitate, Arhimede făcuse același lucru pentru calculul ariei unui segment parabolic (a se vedea p. 234 din acest manual). Cazul său a fost un caz izolat în vremea sa. Însă marii matematicieni ai secolului al XVII-lea îi cunoșteau bine opera și au fost, cu siguranță, influențați de metodele sale.

Doi elevi ai lui Leibniz — Iacob şi Johann Bernoulli — au contribuit mult la răspîndirea şi adoptarea noii discipline. Lui Johann Bernoulli i se datorează scrierea, în 1691—1692, a primului tratat de calcul diferenţial şi integral (publicat, în parte, sub numele lui Hospital — un elev al lui Bernoulli — cincizeci de ani mai tîrziu).

Cu secolul al XVIII-lea, noul calcul cunoaşte o înflorire şi o dezvoltare extraordinară, determinînd, pe de o parte, crearea de noi capitole în matematică, iar pe de altă parte, pătrunzînd în domenii aplicative din ce în ce mai largi.

Leonhard Euler şi-a cîştigat un mare renume nu numai prin rezolvarea unui mare număr de probleme puse de mecanică sau de fizică cu ajutorul noului calcul, dar şi prin nenumărate studii teoretice privind aşa-numitele „ecuaţii diferenţiale" şi capitolul nou creat al *„Calculului variaţiilor"*. Pe drept cuvînt, Euler este considerat ca cel mai mare matematician al secolului său şi unul dintre marii matematicieni ai tuturor timpurilor [1].

J. Lagrange, contemporan şi emul al lui Euler, aduce de asemenea contribuţii însemnate în analiza matematică şi creează „mecanica analitică", în care construieşte sistematic bazele mecanicii teoretice cu ajutorul analizei matematice.

Ritmul dezvoltării matematicii, graţie instrumentului nou de calcul creat de Newton şi Leibnitz este, în secolele al XVIII-lea şi al XIX-lea, de-a dreptul uluitor. Capitole noi se creează, discipline vechi îşi schimbă complet înfăţişarea.

Apar, astfel, în afară de mecanica analitică, geometria diferenţială (cu Clairaut, Monge şi Gauss), teoria ecuaţiilor diferenţiale (cu Euler), mecanica cerească (cu Laplace, d'Alembert). Se constituie, de asemenea, un capitol deosebit de important, atît din punct de vedere al aplicaţiilor, cît şi din punct de vedere teoretic, capitol denumit astăzi „Ecuaţiile fizicii matematice".

Ritmul cercetării matematice este aşa de rapid, încît oamenii de ştiinţă nu au timpul să se ocupe de problemele fundării logice a noii discipline şi nici, uneori, de rigoarea perfectă a raţionamentelor. Fără îndoială, oamenii de ştiinţă ai acestei epoci aveau o intuiţie destul de exactă asupra noţiunilor fundamentale ale analizei matematice, ca noţiunea de funcţie şi noţiunea de limită.

Dar, în nici una din scrierile marilor matematicieni citaţi mai sus nu se găseşte o definiţie corectă a acestor două noţiuni fundamentale.

Opera de consolidare a fundamentelor analizei matematice avea să înceapă cu secolul al XIX-lea, în primul rînd prin celebrul *Curs de analiză* al lui Cauchy, din 1823, şi prin lucrările unui matematician ceh, multă vreme ignorat, B. Bolzano.

Definiţia dată funcţiei de către Cauchy este aproape definiţia de astăzi. Este interesant de observat aici că aceeaşi definiţie se găseşte şi în scrierile lui Lobacevski, creatorul geometriei care-i poartă numele.

De asemenea, Cauchy dă definiţia corectă a continuităţii, aşa cum o învăţăm astăzi, a derivabilităţii, precum şi proprietăţile fundamentale ale funcţiilor continue sau derivabile.

Tot Cauchy defineşte corect, pentru prima oară, integrala definită, pornind de la vechea idee pe care Arhimede a aplicat-o pentru calculul ariei segmentului parabolic. Teoria integralei a fost completată de către Riemann şi apoi de către Darboux în 1875.

Cu sfîrşitul secolului al XIX-lea se atinge ceea ce se poate numi etapa finală a analizei matematice clasice.

Crearea, în această epocă, a teoriei mulţimilor de către Georg Cantor, avea în curînd să dea noi impulsuri acestei discipline, să ducă la crearea de noi capitole, să aşeze întregul edificiu al matematicilor pe noi baze, să ducă, în sfîrşit, la perioada actuală, de intensă bogată activitate, asemănătoare în multe privinţe perioadei de început.

---

[1]) Notaţiile pentru numerele e, i, π ca şi pentru funcţiile trigonometrice se datoresc lui Euler.

În această perioadă apar şcoli puternice noi de matematică.

Cu începutul secolului al XX-lea, se pun bazele şcolii române de matematică, cu *G. Ţiţeica*, cu *Myller*, *Davidoglu*, *Pompeiu*, *Lalescu*[1], *David Emmanuel*.

La început mai modestă, ca volum, această şcoală îşi aduce contribuţia sa din ce în ce mai însemnată în toate domeniile matematicii. Astăzi ne putem mîndri cu o şcoală matematică deosebit de înfloritoare, ai cărei reprezentanţi, oameni de ştiinţă de toate vîrstele, se impun atenţiei cercetătorilor din întreaga lume prin importanţa contribuţiei lor în diferite sectoare ale activităţii matematice şi în special în capitolele moderne ale analizei matematice şi aplicaţiile acestora în fizică şi tehnică.

---

[1]) *Traian Lalescu* este autorul primei cărţi din lume consacrate aşa-numitelor „ecuaţii integrale".

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Capitolul I (Numere)

1. Se ține seama de inegalitatea $a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$. **2.** Se scrie prima dintre inegalitățile de la exercițiul precedent pentru mediile mediilor, adică $\frac{m_{arit}+m_{arm}}{2} \geqslant \sqrt{m_{arit} \cdot m_{arm}}$ ceea ce revine la $\frac{m_{arit}+m_{arm}}{2} \geqslant m_g$, adică $m_{arit}+m_{arm} \geqslant m_g+m_g$. **3.** Se înmulțește cu 2, se trec toți termenii în membrul sting și se pune în evidență o sumă de pătrate. **4.** Se împarte cu abc ($abc \neq 0$) și se ține seamă că, oricare ar fi numerele strict pozitive x, y, are loc inegalitatea $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$. **5.** Se calculează diferența și se majorează numitorul, ținînd seama de condiția din enunț. **6.** Se scrie $m_{arit}-m_g=\frac{m_{arit}^2-m_g^2}{m_{arit}+m_g}$ și se observă că — deoarece $m_{arit} \geqslant m_g$ — rezultă $m_{arit}+m_g \geqslant 2m_g$. Deci, luînd în considerație condiția din enunț, se obține $m_{arit}+m_g > 2a$ (este util să se observe că inegalitatea de la exercițiul 5 rezultă și utilizînd inegalitatea de la exercițiul 6, după ce se scrie $m_{arit}-m_{arm}=(m_{arit}-m_g)+(m_g-m_{arm})$ și după majorarea membrului drept al acestei egalități, ținînd seama de inegalitatea de la exercițiul 2). **7.** Se va observa că trinomul de gradul II $(a_1^2+a_2^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2)x+b_1^2+b_2^2$ se descompune într-o sumă de pătrate, deci are valori pozitive pentru orice x; se scrie apoi consecința pentru discriminant. Un raționament perfect analog conduce la demonstrarea inegalității $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$. **8.** Se pune $a_1=\sqrt{\frac{r}{a}}$, $b_1=\sqrt{\frac{a}{r}}$,... și se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski (pentru $n=3$). **9.** Se pornește de la $\sum(a_k+b_k)^2=\sum a_k^2+\sum b_k^2+2\sum a_k b_k$ și se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski termenului $\sum a_k b_k$ ceea ce conduce la majorarea membrului drept al egalității anterioare prin $\left(\sqrt{\sum a_k^2}+\sqrt{\sum b_k^2}\right)^2$. **10.** Se evaluează $|b-a|$, după cum $a<b$ sau $b<a$. **11.** și **12.** Se ține seamă de regula semnului trinomului de gradul II; la **12.** se va ține seamă de faptul că, pentru a demonstra că $|\alpha|<\beta$, este necesar și suficient să se demonstreze că $-\beta<\alpha<\beta$ (v. § 1, nr. 3, propr. 6). **13.** Se obține $|x|=\frac{3}{5}$, deci $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{3}{5}$. **14.** $x=0$. **15.** Nici o soluție. Exercițiile **16-18.** trebuie tratate examinînd de fiecare dată posibilitățile $x>0$ și $x<0$. **16.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{8}$. **17.** $x=\frac{3}{2}$. **18.** Nici

o soluţie. **19.** $ab > 0$ — două soluţii; $ab < 0$ — nici o soluţie; dacă $ab = 0$, trebuie distinse mai multe cazuri; $b \neq 0$ şi $a = 0$ — nici o soluţie; $b = 0$ şi $a \neq 0$ — soluţia $x = 0$; $a = b = 0$ — o infinitate de soluţii (orice număr real este soluţie). **20.** Se examinează pe rînd toate cazurile posibile, discutînd după semnele lui c, $b + a$ şi $b - a$. Se obţine: $b^2 - a^2 > 0$ — o soluţie (oricare ar fi c); $b^2 - a^2 < 0$ şi $c \neq 0$ — două soluţii sau nici una; dacă $c = 0$, se obţine $x = 0$ — soluţie unică; $b^2 - a^2 = 0$ — o soluţie, dacă $ac > 0$; nici o soluţie, dacă $ac < 0$ sau dacă $a = b = 0$ şi $c \neq 0$, sau o infinitate de soluţii (dacă $a = b = c = 0$). **21.** Se ţine seama că, dacă $0 \leqslant x < y$ atunci $x^n < y^n$, oricare ar fi n natural; se majorează $2a^nb^n$, ţinînd seama de condiţiile din enunţ. **22.** Se scrie $1 - a^n = (1 - a) \cdot (1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})$ şi se majorează membrul drept.

Capitolul II (Mulţimi)

1. $\{1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\} \cap \{-4, 1\} = \{1\}$. **2.** $\emptyset$. **3.** $P_1 \supset P_2 \supset P_4$, $P_1 \supset P_3$, $P_3 \supset P_4$, P_2 şi P_3 — incomparabile; P_1, P_1, P_2, P_4, $\emptyset$, P_4. **4.** $N \supset M_1 \supset M_2$, $N \supset M_3$, P_4, M_1 şi M_3 — incomparabile, M_2 şi M_3 — incomparabile; N, M_1, $\{5\} \cup \{2n\}_{n \in N}$. N, M_3, M_2, $\{2\}$, $\emptyset$; $(M_2 \cup M_3) \cap M_1 = (M_2 \cap M_1) \cup (M_3 \cap M_1) = \{2\} \cup \{6n\}_{n \in N}$. **5.** Mulţimea căutată este intersecţia mulţimilor de numere reale care satisfac fiecare dintre inegalităţi, deci $(-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$. **6.** $(1,4]$. **7.** $[3, +\infty)$. **8.** $\{-1\}$. **9.** $\emptyset$. **10.** Mulţimea numerelor întregi care aparţin intervalului $[-5, -2)$, adică $\{-5, -4, -3\}$. **11.** N. **12.** $\{-2, -1, 0\} \cup N$. **13.** $\{1, 2\}$. **14.** $\emptyset$. **15.** $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **16.** $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$. **17.** $[-3, -1)$. **18.** $(-1, 3]$. **19.** $\{2\}$. **20.** $\emptyset$. **21.** $\emptyset$. **22.** $\emptyset$. **23.** Se pune condiţia $|\sin x| \leqslant 1$ şi se obţine un sistem de două inecuaţii de gradul II în r. Mulţimea căutată este

$$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Capitolul III (Şiruri)

2. (a_n) este crescător, deoarece $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$; evident, $a_n < 0$ pentru orice n. **3.** Şirul este crescător sau descrescător, după cum $\alpha > 0$ sau $\alpha < 0$; $|an| < |\alpha|$ pentru orice n. **4.** Şirul este crescător sau descrescător, după cum $\alpha > 0$ sau $\alpha < 0$; $|a_n| < \frac{|\alpha|}{\beta}$ pentru orice n. **5.** Pentru un $\varepsilon > 0$ oarecare dat, punînd condiţia $|a_n - 2| < \varepsilon$, se obţine $N > \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}$. De exemplu, luînd $\varepsilon = \frac{1}{10^2}$ se obţine $N > 199$, adică termenii a_{200}, a_{201}, a_{202}, ... sînt toţi situaţi în intervalul $\left(2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}\right)$; luînd $\varepsilon = \frac{2}{3}$, se obţine $N > 2$, adică termenii a_3, a_4, a_5, ... sînt situaţi în intervalul $\left(2 - \frac{2}{3}, 2 + \frac{2}{3}\right)$ (este bine ca elevii să verifice că a_1 şi

a_2 — adică 1 și $\frac{4}{3}$ — sînt situați *în afara* acestui interval). Dacă $\varepsilon \geqslant 2$, rezultă $N > 0$, deci *toți* termenii șirului sînt situați în intervalul corespunzător. **6.** Procedînd ca la exercițiul anterior, se obține $N > \frac{|\alpha| - \varepsilon\beta}{\varepsilon\beta^2}$; pentru $\varepsilon < \frac{|\alpha|}{\beta}$ există termeni, *în număr finit*, ai șirului — situați în afara intervalului $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \varepsilon, \frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon\right)$; dacă $\varepsilon \geqslant \frac{|\alpha|}{\beta}$, toți termenii șirului sînt situați în intervalul corespunzător. **7.** și **8.** Sînt convergente primul șir și ultimul șir de la *7.* (limitele sînt 0, respectiv 1) și ultimele trei șiruri de la *8.* (limitele sînt respectiv: 0, 1, — 1); se observă că, de exemplu, primul șir de la *7.* este șirul constant 0, 0, 0, ...; primul șir de la *8.* este — 1, + 1, — 1, + 1, ... ș.a.m.d. **9.** și **10.** Se aplică teorema de la § 2, nr. 2. **11.** — **15.** Se aplică criteriul de convergență (§ 2, nr. 3). La **13.**, pentru a majora, se ține seama de relația $\left|\cos\frac{\alpha}{n} - 1\right| = 2\sin^2\frac{\alpha}{2n}$. La **14.** se observă ușor: $a_n < \frac{10^{2n+1}}{10^{3n}}$. La **15.** se observă $|a_n| < \frac{2^n}{2^{2n}}$. **16.** Șirul este evident crescător. Se stabilește prin inducție completă că $a_n < 2$ pentru orice n. Deci, șirul are limită: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Această limită va putea fi stabilită după parcurgerea paragrafului consacrat operațiilor cu limite, și anume, scriind $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2 + a_{n-1})$, deci $a^2 = 2 + a$; se obține $a = 2$. **17.** Deoarece șirul este crescător, rezultă $a_n^2 = \alpha + a_{n-1} < \alpha + a_n$, adică $a_n^2 - a_n - \alpha < 0$; deci, aplicînd regula semnului trinomului de gradul II, rezultă $a_n < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha}\right)$ pentru orice n. Procedînd ca la exercițiul 16. se obține limita $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha}\right)$. **18.** Șirul este crescător. Se arată prin inducție completă că $a_n < \alpha$ pentru orice n. Limita este $1 - \sqrt{1 - \alpha}$. **19.** Limita este $\sqrt{1 + \alpha} - 1$. **20.**—**33.** Se ține seama de rezultatele de la § 3. **20.** — 3. **21.** Se ține seama de exercițiul **13**; se obține limita — 2. **22.** — 5. **23.** De exemplu, se scrie $a_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\alpha^n}{n + 1}$; se ține seama de exercițiul *6* și se aplică teorema asupra limitei produsului; limita este 0. **24.** Se ține seama și de ultimul exemplu de la nr. 2; se obține e^3. **25.** $\frac{3}{2}$. **26.** — 4. **27.** Este evidentă condiția $\alpha \neq -1$. Pentru $|\alpha| > 1$, scriind $\frac{\alpha^n}{1 + \alpha^n} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^n} + 1}$, se găsește limita 1. Pentru $|\alpha| < 1$, limita este 0; dacă $\alpha = 1$, șirul (a^n) este șirul constant 1,1,1,... și limita este $\frac{1}{2}$. **28.** 0 pentru $|\alpha| \neq 1$; $\frac{1}{2}$ pentru $\alpha = 1$; pentru $\alpha = -1$, șirul este divergent. **29.** Pentru $|\alpha| > 1$; — 1 pentru $|\alpha| < 1$; 0 pentru $|\alpha| = 1$. **30.** 5. **31.** $-\frac{1}{7}$. **32.** 0. **33.** a_n trebuie adus la forma $\frac{P(n)}{Q(n)}$, P și Q fiind polinoame; se obține limita $-\frac{1}{2}$.

Capitolul IV (Puteri şi logaritmi)

1. Se scrie : $\frac{7n^2 - \sqrt{5n^3 + 5n}}{2n^2 - n + 1} = \frac{7 - \sqrt{\frac{5}{n} + \frac{5}{n^3}}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$. Se obţine limita $\frac{7}{2}$. **2.** 0. **3.** —1. **4.** 1. **5.** $\frac{1}{8}$. **6.** 1. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 0.

Capitolul V (Simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$)

1. Se scrie $2n^3 - n^2 + 1 = n^3\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$; se obţine limita $+\infty$. **2.** $-\infty$. **3.** $-\infty$. **4.** Se scrie $\frac{5n^4 - 2}{n^2 + n + 1} = \frac{5n^2 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$; se obţine ∞. **5.** $-\infty$ **6.** ∞. **7.** Se ţine seama de convenţia $\infty^a = \infty$, dacă $a > 0$; în cazul de faţă, $a = \frac{2}{3}$. **8.** $-\infty$. **9.** Deoarece $\sqrt{n^2 + 1} \to \infty$ şi $-n \to -\infty$, iar $\infty - \infty$ nu are sens, trebuie transformat a_n, ceea ce se obţine înmulţind şi împărţind cu expresia conjugată, adică cu $\sqrt{n^2 + 1} + n$; se obţine limita 0. **10.** Se amplifică cu conjugata lui $\sqrt{n^2 + 1} - n$ şi apoi se împart numărătorul şi numitorul cu n; se obţine limita 1. **11.** Se dă în factor n; limita este ∞. **12.** $-\infty$. **13.** ∞. **14.** 0. **15.** ∞. **16.** 0.

Capitolul VI (Funcţii)

1. În primul caz — o singură funcţie, $f(a_1) = f(a_2) = b$; în cazul al doilea — patru funcţii, şi anume două funcţii constante, $f_1(a_1) = f_1(a_2) = b_1$; $f_2(a_1) = f_2(a_2) = b_2$, $f_3(x)$; $f_3(a_1) = b_1$, $f_3(a_2) = b_2$; $f_4(x)$ $f_4(a_1) = b_2$, $f_4(a_2) = b_1$; în cazul al treilea, procedînd în mod analog se găsesc opt funcţii. **2.** $\Delta BMN \sim \Delta ABC$, deci $\frac{b}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}}$. Aplicînd teorema lui Thales în $\Delta ABB'$, rezultă $\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{h}{h - x}$. Se obţine $P(x) = 2b + \frac{2(h - b)}{b}x$, $A(x) = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$; ambele funcţii sînt definite pe intervalul $(0, h)$. **3.** Se ţine seama că masa se obţine înmulţind densitatea cu lungimea. Rezultă :

$$m(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } -\infty < x \leqslant 0 \\ 2x, & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ 2, & \text{pentru } 1 < x < 2 \\ 3, & \text{pentru } 2 \leqslant x < 3 \\ 4, & \text{pentru } 3 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

4. $-2\sqrt{2}$; $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; 0. **5.** $\ln\frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $(\sqrt{2}-3)\frac{\pi}{4}-\ln\frac{5-2\sqrt{2}}{2}$. **6.** 0; $\ln\frac{3}{2}$; 3; 3. **7.** -1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{2\pi+1}{\pi-4}$; 11; $\frac{1}{2}e^{20}$. **8.** 4; 2; $\frac{2383}{1587}$. **14.** $f(x) = -9x + 4$. **15.** $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$. **16.** $f(x) = 10 + 5\cdot 2^x$. **17.** R. **18.** $R - \{1\}$. **19.** $R - \{0, 2, 3\}$. **20.** $[1, +\infty)$. **21.** $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. **22.** R. **23.** $(-2, +\infty) - \{0\} = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$. **24.** $[0, +\infty) - \{7\} = [0, 7) \cup (7, +\infty)$. **25.** Se pune condiția $f(x) \geqslant 0$ și se obține $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$. **26.** $(-5, 2)$. **27.** $(-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$. **28.** $(0, +\infty) - \{1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. **29.** $[1, +\infty)$. **30.** $(-1, 2)$. **31.** $R - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}_{k \text{ întreg}}$. **32.** $R - \{k\pi\}$ k întreg. **33.** $R - \{0\} - \{2k\pi\}$ k întreg. **34.** $f(x)$ este definită pentru $\sin x > 0$, adică pe reuniunea infinită de intervale: $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$ **35.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cup \ldots$ **36.** $[-1, +\infty)$; funcția poate fi definită în -1, deoarece în acest punct exponentul $1 - x$ este pozitiv. **37.** R. **38.** $[0, +\infty)$. **39.** $[-1, 2)$. **40.** Reuniunea dintre mulțimea numerelor iraționale pozitive și mulțimea numerelor raționale ρ cu $|\rho| < 1$. **41.** $R - \{1\}$, respectiv R. **42.** R, respectiv $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **43.** $(0, +\infty$, respectiv $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. **44.** $R - \{-7, 1\}$, respectiv $(-7, 1)$. **45.** fg pe $[0, 2]$; $\frac{g}{f}$ pe $[0, 2]$; $\frac{f}{g}$ pe $[0, 2] - \{1\}$. **46.** fg pe $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup [1, \pi)$; $\frac{f}{g}$ pe $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left[(1, \pi) - \left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$; $\frac{g}{f}$ pe $\left(-\frac{9}{4}, -2\right) \cup (1, \pi)$. **47.** $f + g$ poate fi definită doar în punctele -3 și 3; $\frac{f}{g}$ nu poate fi definită în nici un punct. **48.** $f + g$ — în punctul 4; $\frac{f}{g}$ — în nici un punct. **49.** Atît $f + g$, cît și $\frac{f}{g}$ nu pot fi definite în nici un punct. **50.** $f(x) = 8x^3$. **51.** $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x+1}$. **52.** $f(x) = \ln(3\sin(4x-2))$. **53.** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{(1+x)^2}$. **54.** $\varphi(u) = u^{23}$, $u(x) = x^2 + x + 1$. **55.** $\varphi(u) = \sin u$, $u(x) = 2x + 3$. **56.** $\varphi(v) = \operatorname{arctg} v$, $v(u) = u^4$, $u(x) = x - 5$; sau $\varphi(z) = \operatorname{arctg} z$, $z(x) = (x-5)^4$. **57.** $\varphi(v) = \sqrt{v}$, $v(u) = \operatorname{tg} u$, $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$. **58.** $\varphi(v) = \ln v$, $v(u) = \cos u$, $u(x) = x^{\frac{2}{3}}$ **59.** $\varphi(w) = w^2$, $w(v) = \ln v$, $v(u) = \operatorname{arcsec} u$, $u(x) = (x+3)^5$. **60.** x^{2n} — strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$; x^{2n+1} — strict crescătoare pe R. **61.** $\frac{1}{x^{2n}}$ strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$; $\frac{1}{x^{2n+1}}$ — strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ în parte, dar nu este strict descrescătoare pe R. **62.** $\sqrt{x}$ — strict crescătoare pe $[0, +\infty)$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$ strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$; $\sqrt[3]{x}$

strict crescătoare pe R; $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ — strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ în parte. **63.** a^x — strict crescătoare pe R, dacă $a > 1$, şi strict descrescătoare pe R, dacă $0 < a < 1$. **64.** $\sin x$ — strict crescătoare pe intervalele de forma $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, k întreg, şi strict descrescătoare pe intervalele de forma $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$, k întreg; $\cos x$ — strict crescătoare pe $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$, k întreg şi strict descrescătoare pe $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, k întreg; $\mathrm{tg}\, x$ — strict crescătoare pe $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ k întreg; $\mathrm{ctg}\, x$ — strict descrescătoare pe $(k\pi, (k+1)\pi)$ k întreg. În exerciţiile **65.** — **78.** se va ţine seama de rezultatele obţinute la paragraful consacrat funcţiilor inverse; în cazul cînd $f(x)$ admite inversă, se rezolvă în raport cu x ecuaţia $f(x) = y$ etc. **65.** R; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{7+x}{3}$ **66.** $f(x)$ nu este biunivocă pe R, deci nu are inversă pe R; dar, pe $(-\infty, 0]$ $f(x)$ este strict descrescătoare, deci, notînd cu $f_1(x)$ funcţia $x^2 - 1$ definită pe $(-\infty, 0]$, se obţine: $\overset{-1}{f_1}(x) = -\sqrt{x+1}$; în mod analog, pe $[0, +\infty)$, inversa funcţiei crescătoare $f_2(x)$ este: $\overset{-1}{f_2}(x) = \sqrt{x+1}$ **67.** R; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x-5}$. **68.** $f(x)$ nu are inversă pe $[-2,2]$, dar, procedînd ca la exerciţiul **66.** se obţine: pe $[-2 0]$ $\overset{-1}{f_1}(x) = -\sqrt{4-x^2}$, iar pe $[0, 2]$: $\overset{-1}{f_2}(x) = \sqrt{4-x^2}$. **69.** R; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{5}\log_a ax$. **70.** $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{e^x+3}{2}$. **71.** $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{3}\arcsin x$. **72.** $\left(0, \frac{5\pi}{3}\right)$; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{5}{.3}\ \mathrm{arcctg}\, x$. **73.** $\left[0, \frac{2\pi}{7}\right]$; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{2}{7}\arccos 3x$. **74.** $\left(\frac{-\pi-2}{6}, \frac{\pi-2}{6}\right)$; $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{2} - 1\right)$. **75.** Funcţia omografică este definită pe $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, oricare ar fi a, b, c, d, (exceptînd cazul $c = d = 0$). Se va arăta că, dacă $ad \neq bc$, funcţia este biunivocă şi, reciproc, dacă $ad - bc > 0$ funcţia este strict crescătoare, iar dacă $ad - bc < 0$, funcţia este strict descrescătoare; dacă $ad = bc$ atunci, pentru *orice* $x_0 \in R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ rezultă $f(x_0) = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$. În cazul $ad \neq bc$, şi numai în acest caz, se obţine $\overset{-1}{f}(x) = \frac{dx-b}{a-cx}$.

76. — **78.** $f_1(x)$ poate fi inversată pe $R - \left\{\frac{5}{3}\right\}$, iar $f_3(x)$ pe $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $f_2(x)$ nu admite inversă. Este util studiul comparativ al funcţiilor $f_2(x)$ şi $\varphi(x)$, ultima fiind obţinută rezolvînd în raport cu x ecuaţia $f_2(x) = y$ (dar φ *nu* este inversa lui f_2). Se va observa că atît f_2, cît şi φ sînt funcţii constante şi anume f_2 este definită pe $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ şi ia valoarea $-\frac{1}{2}$, iar φ este definită pe $R - \left(-\frac{1}{2}\right)$ şi ia valoarea $\frac{2}{3}$. Să se reprezinte grafic.

Capitolul VII (Limite de funcţii)

1. Oricare ar fi şirul $x_n \to 3$ $(x_n \neq 3)$, rezultă $2x_n \to 6$, deci $\dfrac{1}{2x_n + 1} \to \dfrac{1}{7}$. **2.** Analog cu exerciţiul **1**. **3.** Oricare ar fi şirul $x_n \to 1$ $(x_n \neq 1)$, rezultă $3x_n + 5 \to 8$ şi $(x_n - 1)^2 \to 0$; dar $(x_n - 1)^2 > 0$, deci $\dfrac{1}{(x_n - 1)^2} \to \infty$; prin urmare $\dfrac{3x_n + 5}{(x_n - 1)^2} \to \infty$. **4.** Oricare ar fi şirul $x_n \to \infty$, se scrie $\dfrac{2x_n^2 + x_n + 5}{3x_n^2 - 2x_n + 1} = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{5}{x_n^2}}{3 - \dfrac{2}{x_n} + \dfrac{1}{x^n}}$ şi se observă că, oricare ar fi numărul real, r: $\dfrac{r}{x_n} \to 0$ şi $\dfrac{r}{x_n^2} \to 0$. **5.** Analog cu exerciţiul **4**. **6.** Se scrie $\dfrac{x_n^2 - x_n + 1}{x_n - 3} =$
$= x_n \dfrac{1 - \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_n^2}}{1 - \dfrac{3}{x_n}}$. **7.** şi **8.** Analog cu exerciţiul **6**. **9.** De exemplu, pentru $f_1(x) = \sin x$, considerînd şirul $(x_n) = (n\pi)$, evident că $x_n \to +\infty$, iar $(\sin x_n)$ este şirul $0, 0, 0, \ldots$, deci $\sin x_n \to 0$. Luînd apoi alt şir, de pildă $y_n = \dfrac{(4n + 1)\pi}{2}$, evident că $y_n \to \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \sin y_n = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$. Se mai poate observa că există şiruri $z_n \to \infty$, de exemplu $z_n = \dfrac{n\pi}{2}$, astfel încît şirul $(\sin z_n)$ nu are limită. **10. — 13.** Toate limitele sînt egale cu 0. Se va ţine seama de inegalităţile $|\sin \alpha| \leqslant 1$, $|\cos \alpha| \leqslant 1$, $|\alpha| \leqslant |\operatorname{tg} \alpha|$. **14.** Pentru $x > -5$, $2x^2 + x + 5 > 2x^2$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$, deoarece $2x_n^2 \to \infty$, oricare ar fi şirul $x_n \to \infty$; limita căutată este de asemenea ∞, **15.** Pentru $x < -1$, $x^3 + x + 1 < x^3$; limita căutată este $-\infty$. **16.** Pentru $x > -2$, $x + 3 > 1$; limita căutată este ∞. **17.** $e^{2x^2+x+1} > 2x^2 + x + 1 > 2x^2$; limita este ∞. **18.** $e^{\sqrt{x^3}} > x^{\frac{3}{2}}$; limita este ∞. **19.** $e^{\frac{1}{x^2}} > \dfrac{1}{x^2}$; limita este ∞. **20.** $\dfrac{\ln(x - 1)}{x^8} < \dfrac{1}{x^7}$; limita este 0. **21.** $\dfrac{\ln(\sin x + 2)}{x^6} < \dfrac{\sin x + 2}{x^6} < \dfrac{3}{x^6}$; limita este 0. **22.** În punctul $x = -7$: $l_s = -\infty$, $l_d = \infty$. **24.** În $x = -1$, $l_s = \infty$, $l_d = -\infty$; în $x = 1$, $l_s = -\infty$, $l_d = \infty$. **24.** În $x = 2$, $l_s = -\infty$, $l_d = \infty$. **25.** În $x = 0$, $l_s = 0$, $l_d = \infty$. **26.** În $x = 8$, $l_s = 1$, $l_d = 0$. **27.** 16. **28.** $54e^3 - 4$. **29.** $-\dfrac{1}{3}$. **30.** $\dfrac{27\pi^3}{4} + 5$. **31.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right)$. **32.** $-\dfrac{125\pi^3\sqrt{2}}{128} + 7$. **33.** ∞. **34.** $-\infty$. **35.** ∞. **36.** $-\infty$. **37.** Se scrie: $\dfrac{\sin 7x}{3x} = \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{\sin 7x}{7x}$; limita este $\dfrac{7}{3}$. **38.** Se scrie: $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{1}{\cos 3x}$ şi se ob-

servă că $\lim_{x\to 0} \cos 3x = 1$; limita este $\frac{3}{2}$. **39.** $\frac{5}{8}$. **40.** $\frac{1}{k^2}$. **41.** Se scrie $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$; limita este $\frac{1}{2}$. **42.** 5. **43.—45.** Se transformă diferențele în produse; se obțin respectiv, limitele: 2, — 4, $\frac{n^2 - m^2}{2}$. **46.** Se înlocuiește tg x cu $\frac{\sin x}{\cos x}$; limita este $\frac{1}{2}$. **47.** $\sqrt{3}$. **48.** $\left(\frac{37}{16}\right)^{\sqrt{3}}$. **49.** ∞. **50.** ∞. **51.** e^{15}. **52.** 1. **53.** $\frac{\pi}{2}$. **54.** $\frac{1}{2}$. **55.** 0. **56.** ∞. **57.** ∞. **58.** 0. **59.** 0. **60.** 0. **61.** ∞. **62.** 0. **63.** $-\infty$. **64.** $-\infty$. **65.** $-\infty$. **66.** ∞. **67.** $-\frac{1}{5}$. **68.** -6. **69.** 0. **70.** $-\infty$. **71.** ∞. **72.** $-\infty$. **73.** ∞. **74.** -1. **75.** -8. **76.** 6. **77.** -1. **78.** și **79.** Se împart atît numărătorii, cît și numitorii cu x; se obțin, respectiv, limitele 1 și — 1. **80.** Se amplifică fracția cu conjugata numărătorului; limita este $\frac{1}{2}$. **81.** $\frac{1}{2}$. **82.** $\frac{1}{2}$. **83.** Se amplifică fracția cu produsul dintre conjugata numărătorului și conjugata numitorului; limita este 1. **84.** ∞. **85.** 0. **86.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **87.—92.** Se procedează ca în exemplul de la nr. 4. § 6. **87.** e^2. **88.** e. **89.** e. **90.** 0. **91.** e^3. **92.** 1.

Capitolul VIII (Funcții continue)

1. Pentru *oricare* $x_0 \neq -1$, $\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - \sin x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to x_0}(x^2 - \sin x)}{\lim_{x\to x_0}(x+1)} = \ldots = f(x_0)$, deci funcția este continuă pe $R - \{-1.\}$ **2.** Funcția este continuă pe $R - \left\{\frac{9}{2}\right\}$. **3.** Funcția este continuă pe $R - \{0\}$. **4.** Funcția este continuă pe $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \left\{\frac{(2h+1)\pi}{2}\right\}$ k întreg. **5.** Funcția este continuă pe tot intervalul [0,5]. Pentru $x \neq 2$, continuitatea rezultă imediat. În $x = 2$, $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 4$. Este recomandabil să se construiască graficul funcției (se va observa că, în punctul (2, $f(2)$), arcul de parabolă se „continuă" cu segmentul de dreaptă). **6.** Funcția este continuă pe R. În $x = 0$: $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$. **7.** Funcția este continuă pe $[0, +\infty) - \{1\}$; $f(1-0) = 3$, iar $f(1+0) = 1$. **8.** Funcția este continuă pe $[-2, +\infty) - \{2\}$; $f(2-0) = f(2+0) = 9$, dar $f(2) = 1$. **9.** Funcția este continuă pe $R - \{-1\}$; $f(1-1-0) = f(-1+0) = \infty$. **10.** Funcția este continuă pe $R - \{1\}$; $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$; deci, oricare ar fi α, funcția este discontinuă în punctul $x = 1$. **11.** $f(2-0) = f(2+0) = 4$; deci dacă $\alpha = 4$, funcția este continuă pe R, iar dacă $\alpha \neq 4$, funcția este continuă pe $R - \{2\}$. **12.** $f(0-0) = 1$, $f(0+0) = \alpha$, $f(0) = \alpha$; deci, dacă $\alpha = 1$, funcția este continuă pe R, iar dacă $\alpha \neq 1$, funcția este continuă pe $R - \{0\}$. **13.** Funcția este discontinuă pe R; în orice punct α, funcția nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta (se va ține seama de faptul că, *oricare* ar fi numărul real α, există $x_n \to \alpha$, cu x_n rațional pentru orice n, și $y_n \to \alpha$, cu y_n irațional pentru orice n). Funcția este continuă pe R. Rădăcinile ecuației $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ sînt: $-3, -1, 1, 3$; pe $(-\infty, -3)$,

funcția este strict pozitivă; pe $(-3, -1)$ — strict negativă; pe $(-1,1)$ — strict pozitivă; pe $(1,3)$ — strict negativă; pe $(3,\infty)$ — strict pozitivă. **15.** Funcția este continuă pe R; pe $(-\infty, -2)$ — strict negativă; pe $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ — strict pozitivă; pe $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ — strict negativă; pe $(1, \infty)$ — strict pozitivă. **16.** Se procedează ca la exemplul 2 de la § 3; pe $(-\infty, -3)$, funcția este strict pozitivă; pe $(-3, -1)$ — strict negativă; pe $(-1,0)$ — strict negativă; pe $(0,2)$ — strict pozitivă; pe $(2,\infty)$ — strict negativă. **17.** Funcția este continuă pe $[0, 2\pi]$; pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ — strict negativă; pe $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ — strict pozitivă; pe $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ — strict negativă. **18.** Funcția este continuă pe $[0, 2\pi]$ pe $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ — strict negativă; pe $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ — strict pozitivă; pe $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ — strict negativă; pe $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ — strict pozitivă; pe $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$ — strict negativă. **19.** Funcția este continuă pe R; pe $\left(-\infty, \ln\frac{5}{2}\right)$ — strict negativă; pe $\left(\ln\frac{5}{2}, \infty\right)$ — strict pozitivă. **20.** Funcția este continuă pe $(0, \infty)$; ecuația $1 + 2\ln x = 0$ are soluția $\frac{1}{\sqrt{e}}$; se constată ușor că $f\left(\frac{1}{e}\right) < 0$ și $f(1) > 0$, deci, pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ funcția este strict negativă, iar pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ — strict pozitivă. **21.** Funcția este continuă pe $(0, \infty)$; ecuația $\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$ are soluțiile $x = e$ și $x = e^2$; se constată ușor că $f(1) > 0$, $f(e^{\frac{3}{2}}) < 0$, $f(e^3) > 0$; deci pe $(0, e)$ funcția este strict pozitivă; pe (e, e^2) — strict negativă; pe (e^2, ∞) — strict pozitivă.

Capitolul IX (Derivate)

1.—8. Se cercetează dacă raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ are limită în $x = x_0$: **1.** $f'(1) = 3$. **2.** $f'(3) = 78$. **3.** $f'(-2) = 2$. **4.** $f'(1) = \frac{1}{2}$. **5.** $f'(0) = 0$. **6.** $f'(0) = 2$. **7.** $f(x)$ este continuă în $x = 1$, dar nu este derivabilă în acest punct; notînd $R(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ se va arăta că $R(1 - 0) = 3$, $R(1 + 0) = 2$. **8.** $f(x)$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct (se va ține seama de faptul că $\sin\frac{1}{x}$ nu are limită în $x = 0$). **9.—10.** Se ține seama de interpretarea geometrică a derivatei. Derivata se va calcula aplicînd direct definiția **9.** $\alpha = -3$. **10.** $\alpha = -\frac{32\sqrt{3}}{3}$. **11.** $6x^2 - 14x + 1$. **12.** $5x^4 - 96x^3 + 16$. **13.** $3x^3 - 15x^2 + x$. **14.** $\frac{6}{7}x^5 - 15x^4 + \frac{4}{3}x$. **15.** $7\cos x - 6x^2$. **16.** $20x^3 + 2\sin x + x + 3\cos x$. **17.** $-2(1 + x)\sin x - x^2\cos x$. **18.** $5\cos 2x$. **19.** $x^2\cos x$. **20.** $(3x^2 - 2x - 2)\sin x + x(x^2 - x - 2)\cos x$. **21.** $9(2x + 1)(x^2 + x + 1)^8$. **22.** $2(3x - 2)^{731}(5505x^2 - 10x + 1098)$.

23. $-7\cos^6 x \sin x$. **24.** $\sin^3 x$. **25.** $\cos^3 x$. **26.** $\frac{3}{4}\sin^2 2x - \sin^4 x$. **27.** $\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x(m\cos^2 x - n\sin^2 x)$. **28.** $3(2-x^2)^{431}\cdot[(2-x^2)\sin 2x - 864x\sin^2 x]$. **29.** $\sin^4 x\cos^4 x$. **30.** $\frac{2}{(x+1)^2}$.

31. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **32.** $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. **33.** $\frac{5-12x}{x^6}$. **34.** $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$. **35.** $\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}$. **36.** $=\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$. **37.** $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$. **38.** $\frac{1}{1+\cos x}$. **39.** $\frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$. **40.** $\frac{1}{\cos^4 x}$. **41.** $\frac{1}{\sin^4 x}$. **42.** $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$. **43.** $\frac{1}{\cos^8 x}$. **44.** $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin 2x}$. **45.** $\frac{8}{\cos^5 x} - \frac{3}{\cos x}$. **46.** $\sin^2 x$. **47.** $2\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)$. **48.** $\frac{2(1+2\sin 2x)}{\cos^2 2x}$. **49.** $2\cos^4(2x-1) - \frac{3}{2}\sin^2(4x-2)$. **50.** $12(2x+1)(x^2+x+1)^3\sin 2[(x^2+x+1)^4]$. **51.** $\cos x\cdot\cos(\sin x)$. **52.** $\frac{-2x\sin x^2}{\cos^2(\cos x^2)}$. **53.** $-\frac{2\sin x\cdot\sin(\cos x)}{\cos^3(\cos x)}$.

54. $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$. **55.** $n\sin^{n-1} x\cdot\cos(n+1)x$. **56.** $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$. **57.** $\ln x$. **58.** $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. **59.** $\frac{1-\ln x}{x^2}$. **60.** $\frac{3}{3x-1}$. **61.** $\frac{2(2x+1)}{x^2+x+1}$. **62.** $\frac{12x^2}{(x^3-1)\ln 10}$.

63. $\frac{3}{x^2-1}$. **64.** $\frac{2x}{x^4-5x^2+6}$. **65.** $\operatorname{ctg} x$. **66.** $\frac{2}{\sin 2x}$. **67.** $\frac{1}{x\ln x}$. **68.** $-n\operatorname{tg} x$.

69. $\frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$. **70.** $\operatorname{tg}^3 x$. **71.** $\frac{1}{\sin^3 x}$. **72.** $-\sec x$. **73.** $2e^x\sin x$. **74.** $e^{5x}(5\sin 3x + 3\cos 3x + 5)$. **75.** $13e^{2x}\cos 3x$. **76.** $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **77.** $-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. **78.** $\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. **79.** $-2xe^{-x^2}$.

80. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. **81.** $nx^{n-1}(a)^{x^n}\ln a$. **82.** $6(x+1)\,a^{3x^2+6x+1}\ln a$. **83.** $\frac{-2a^{\frac{x+1}{x-1}}\ln a}{(x-1)^2}$.

84. $2^x\cdot x$. **85.** $3x^{2^{\frac{1}{2}}} - 5x^{-\frac{1}{2}} + 3$. **86.** $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 6x$. **87.** $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 10x^4$.

88. $\frac{7}{8\sqrt{x}}$. **89.** $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$. **90.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **91.** $\frac{15}{2}x\sqrt{x-1}$. **92.** $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

93. $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$. **94.** $\frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x^2}}$. **95.** $\frac{a^4-a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **96.** $\frac{xe^{\sqrt{x}}}{2}$. **97.** $\frac{1}{x(1+x^2)}$.

98. $\frac{30}{100-9x^2}$. **99.** $\frac{1}{\cos 2x}$. **100.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$. **101.** $\frac{e^x(x^4+2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **102.** $(1-\ln x)x^{\frac{1}{x}-2}$. **103.** $\frac{1}{2}(\ln x+2)\,x^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}$. **104.** $(\sin x + x\cos x\cdot\ln x)\,x^{\sin x-1}$.

105. $2\left(\frac{1+x^2}{\sin 2x} + x\ln\operatorname{tg} x\right)(\operatorname{tg} x)^{1+x^2}$. **106.** $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; $f'(2) = f'(-2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

107. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **108.** $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **109.** 1. **110.** $-\frac{2x}{|x|(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}$; $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **111.** $\frac{2x}{|x|(1+x^2)}$; $f'(3) = \frac{1}{5}$, $f'(-3) = -\frac{1}{5}$. **112.** $\frac{1}{a^2+x^2}$. **113.** $-\frac{1}{1+x^2}$.

114. $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **115.** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. **116.** $e^{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}(1+2x\,\mathrm{arctg}\,x)$. **117.** $\frac{1}{12}$. **118.** $\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}$. **119.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$. **120.** *a*) $\frac{3}{10}$; b) $\frac{1}{40}$; c) $-\frac{1}{120}$. **121.** $\frac{1}{10}$. **122.** $\frac{1}{50}$. **123.** $\frac{2}{225}$. **124.** $\frac{1}{3000}$. **125.** Notind cu r raza cilindrului şi cu x înălţimea sa, se obţine $V(x) = \pi r^2 x$, deci $\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}x$. Înlocuind $x = 2{,}7$ şi $\mathrm{d}x = 0{,}15$, se obţine $\mathrm{d}V = 3{,}43359$ m³. Se recomandă, pentru a aprecia eroarea comisă, să se efectueze şi calculul direct, fără utilizarea diferenţialei. **126.** Conform legii lui Ohm: $I = \frac{V}{R} = \frac{120}{R}$; deci $\mathrm{d}I = -\frac{120}{R^2}\mathrm{d}R$. Înlocuind $R = 550$ şi $\mathrm{d}R = 5$, se obţine $\mathrm{d}I = -0{,}0019$ amperi; rezultatul se explică prin faptul că intensitatea curentului scade atunci cînd rezistenţa creşte. **132.** Se arată că $P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = P'''(-1) = 0$ şi $P^{IV}(-1) \neq 0$. **135.** Se pun condiţiile $P(1) = P'(1) = 0$. Se obţine: $a = n$, $b = -n-1$. **136.** Rădăcinile lui $P'(x)$ sînt -1 şi 1. Punînd condiţiile $P(-1) = 0$ şi apoi $P(1) = 0$, se obţine — respectiv — $a = -2$ şi $a = 2$. **137.** Pentru $a = 0$, rădăcina dublă $x = 0$; pentru $a = \frac{125}{128}$, rădăcina dublă $x = \frac{5}{2}$. **138.** $a = \frac{40}{3}$, $b = 80, c = -12$. **139.** $v = 28$ m/s; $a = 10$ m/s²; $\frac{mv^2}{2} = 1146$ kgm. **140.** $\alpha = \frac{3}{2}$; $b = -2$. **141.** $\alpha = \frac{25}{8}$; $b = 15$. **142.** Condiţiile din problemă sînt: $s(0) = 10$, $s(2) = 6$, $v(2) = 6$; se obţine: $\alpha = 4$, $b = -10$, $c = 10$. În problemele **143.**—**146.** se ţine seama că, în vid, legea de mişcare a corpurilor care cad liber este $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, iar legea de mişcare a corpurilor aruncate vertical în sus este $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; unde g (acceleraţia gravitaţională) $\approx 9{,}8$ m/s², iar v_0 — viteza cu care este aruncat corpul. **143.** $t \approx 4{,}9$; $v \approx 48$ m/s. **144.** $h = 122{,}5$ m; $v = 49$ m/s. **145.** Evident, în momentul t_1 în care începe căderea, avem $v(t_1) = 0$. Se obţine: $t_1 \approx 10{,}2$ s; $h \approx 510{,}2$ m; $t_2 = 10{,}2$ s; $v \approx 100$ m/s. **146.** Condiţiile din problemă conduc la sistemul de ecuaţii: $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = 150$, $-gt + v_0 = 0$; se obţine $t \approx 5{,}5$ s, $v_0 \approx 54{,}22$ m/s. **147.** $Q(t) = 1{,}118 \ln(1+t)$ $I(t) = \frac{1{,}118}{1+t}$; $I(0) = 1{,}118$ amperi; $I(2) \approx 0{,}373$ amperi. **148.** V, R, I fiind — respectiv — tensiunea, rezistenţa şi intensitatea, se ştie că $V = R \cdot I$ (legea lui Ohm); $I(t) = 6\pi \cos 2\pi t$; se obţine V_{max} pentru $\cos 2\pi t = 1$ (adică pentru orice t întreg pozitiv): $V_{max} = 600\pi$ volţi. **149.** $\rho = 13$ g/cm.

Capitolul X (Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor)

1.—**2.** Se ţine seama de faptul că între două rădăcini ale funcţiei se află cel puţin o rădăcină a derivatei, de gradele lui f_1 şi f_2 şi de teorema (cunoscută din cl. a X-a) asupra numărului rădăcinilor unei ecuaţii algebrice de grad n. **1.** $\left(-5, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(3, 7)$.

2. $(-3, -1)$, $(-1,0)$, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{5},4\right)$. 3. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 6 = f'(c)$, cu $c \in (1,2)$; într-adevăr, $f'(x) = 4x$ și ecuația $4x = 6$ are soluția $x = \frac{2}{3} \in (1, 2)$. 4. Punctul corespunzător este $-5 + \sqrt{24}$. 5. Se obțin punctele $\pm\sqrt{\frac{\ln 9 - 2}{\ln 9}}$; aceste puncte aparțin intervalului $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, deoarece $\frac{\ln 9 - 2}{\ln 9} < \frac{1}{4}$ (această inegalitate revine la inegalitatea $\ln 3 < \frac{4}{3}$, care poate fi verificată utilizînd tabelele de logaritmi zecimali; în acest scop se scrie $\ln 3 = \frac{\lg 3}{\lg e}$.

6. Se obțin punctele $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi\sqrt{2}}$. 7. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = nc^{n-1}$ cu $c \in (a,b)$; se observă că $na^{n-1} < nc^{n-1} < nb^{n-1}$. 8. Se aplică formula creșterilor finite funcției $f(x) = \ln(1 + x)$, în intervalul $[0, x]$. 9. Se aplică formula creșterilor finite funcției $f(x) = e^x$ în intervalul $[1, x]$. 10.—13. În fiecare caz în parte se va determina constanta dînd lui x valori particulare. 10. $C = \operatorname{arctg} a$ $\left(\text{pe orice interval care nu conține punctul } x = \frac{1}{a}\right)$.
1 . $C = 0$. 12. $C = 0$. 13. $C = 0$ $\left(\text{pe orice interval care nu conține punctul } x = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.
14. Din $F = ma$ rezultă $a = -10$ m/s^2; deci $v(t) = -10\,t + C$; se ține seama de condiția nițială; rezultă: $\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{=2} = 5 \cdot 780^2$ kgm 15. $v(t) = at$, $s(t) = \frac{1}{2}at^2$; deci: $v(50) = 20$ m/s, $s(50) = 500$ m; accelerația de frînare este 0,4 m/s^2, timpul de parcurgere a distanței dintre gări este 31 min. 40 s. 16. Strict descrescătoare pe $(-\infty =, 5)$, strict crescătoare pe $(5,\infty)$; $x = 5$ min. 17. Strict crescătoare pe $(-\infty, -3)$ și pe $(3,\infty)$ și strict descrescătoare pe $[3,3]$; $x = -3$, max.; $x = 3$, min. 18. Strict crescătoare pe $(-\infty,6)$, strict descrescătoare pe $(6,\infty)$; $x = 6$, max. 19. Strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$ și pe $(-1,\infty)$. 20. Strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ și pe $\left(-\frac{4}{3},\infty\right)$. 21. $x = -1$, min.; $x = 1$, max. 22. $x = \frac{1}{2}$, min.
23. $x = -\sqrt{2}$, max.; $x = 0$, min.; $x = \sqrt{2}$, max. 24. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ min., în $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, funcția și derivata sa nu sînt definite (ele pot fi definite cel mult pe intervalul $[-1,1)$).
25. $x = \frac{3\pi}{4}$, max.; $x = \frac{7\pi}{4}$ min. 26. Strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și pe $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
27. $x = \frac{\pi}{2}$, max.; $x = \frac{3\pi}{2}$, min. 28. $x = \frac{1}{e}$, min. 29. $x = e$, min. 30. $x = e$, max.
31. $x = 0$, max. 32. $x = -3$, min. 33. $x = 0$, min..; $x = 4$, max. 34. Pentru n par $x = 0$, min.; iar $x = n$ max.; pentru n impar $x = n$, max. 35. $x = \ln 2$, max. 36. Strict crescătoare pe $(0,\infty)$. 37. $x = \frac{1}{e}$ min. 38. $x = e$, max. 39. $s(0) = 2$, $v(0) = -8$; deci, mișcarea începe din punctul $+2$ în sensul negativ al axei Ox; $v(t) = 0$ pentru $t = 2$, deci mobilul începe să se miște în sensul pozitiv al axei Ox la două secunde de la începerea mișcării. 40. $s(0,75) = 2\sqrt{2}$, $v(0,75) = -2\pi\sqrt{2}$. 41. Convexă pe R. 42. Concavă pe R. 43. Concavă pe $(-\infty,-3)$; convexă pe $(-3,\infty)$; $x = -3$, punct de infl. 44. Convexă pe R. 45. Concavă

pe $(-\infty, 0)$; convexă pe $(0,\infty)$; $x = 0$, punct de infl. **46.** Convexă pe $(-\infty,1)$; concavă pe $(1,\infty)$; $x = 1$ nu este punct de infl. (funcția și derivatele sale nu sînt definite în $x = 1$). **47.** Convexă pe $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ și pe $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$; concavă pe $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ și $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, puncte de infl. **48.** Convexă pe $(-\infty, -1)$ și pe $(0,1)$; concavă pe $(-1, 0)$ și pe $(1, \infty)$; $x = 0$, punct de infl. **49.** Convexă pe $(-\infty, -1)$; concavă pe $(1, \infty)$. **50.** Convexă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ și pe $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$; concavă pe $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$; $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ puncte de infl. **51.** Concavă pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$; convexă pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$; $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$, punct de infl. **52.** Convexă pe $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și pe $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ și concavă pe $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puncte de infl. **53.** Dreapta $y = 0$ (axa Ox). **54.** Dreptele $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. **55.** $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$. **56.** $x = 1$, $y = 1$. **57.** $x = 0$ (axa Oy), $y = x$. **58.** $x = 1$, $y = 2x + 3$. **59.** $x = -2$, $x = 2$, $y = 5x - 2$. **60.** $x = 1$. **61.** $x = -1$, $y = 1$ **62.** Toate dreptele $x = (2k + 1)\pi$, k întreg. **63.** $x = -1$, $x = 1$. **64.** $x = 0$, $y = 1$. **65.** Punct de min.: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. **66.** Punct de max.: $(2,4)$. **67.** Punct de infl.: $(0,1)$. **68.** Punct de min.: $(0,-4)$. **69.** Extreme pentru $x = \pm\sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10}} \approx \pm 1{,}65$ (valoarea negativă corespunde unui max., iar cea pozitivă unui min.) și pentru $x = \pm\sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}} \approx \pm 0{,}54$ (valoarea negativă corespunde unui min., iar cea pozitivă unui max.); puncte de infl. pentru $x = 0$ și pentru $x = \pm\sqrt{1{,}5}$. **70.** Punct de max.: $(0,1)$; puncte de infl.: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$; asimptotă: dreapta $y = 0$. **71.** Punct de min.: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; punct de max.: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; puncte de infl.: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; asimptotă: $y = 0$. **72.** Asimptote: $x = 1$ și $y = 1$. **73.** Punct de max. $(-1, -2)$; punct de min. $(1, 2)$; asimptote: $x = 0$ și $y = x$. **74.** Punct de min. $(0,1)$; asimptote: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. **75.** Punct de infl.: $(0,0)$, asimptote: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. **76.** Punct de min.: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$; puncte de max. $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{4}{3}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{4}{3}\right)$; asimptote: $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$. **77.** Funcția este definită pe $[2, \infty)$; punct de min. $(2,0)$; funcția nu este derivabilă în $x = 2$; avem: $\lim\limits_{x \to 2} f'(x) = \infty$, deci în $(2,0)$ graficul are semitangentă paralelă cu axa Oy. **78.** Funcția este definită pe $[0, \infty)$; punct de min. $(0,0)$; în acest punct, semiaxa Ox pozitivă este tangentă la grafic. **79.** Funcția este definită pe $(0,1]$; punct de min. $(1,0)$; în $x = 1$, funcția nu este derivabilă; în punctul de min., graficul are semitangentă paralelă cu Oy; punct de infl.

$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; asimptotă $x = 0$. **80.** Funcţia este definită pe $[0, 1)$; punct de min. $(0,0)$, în acest punct, semiaxa Ox pozitivă este tangentă la grafic; asimptotă: $x = 1$. **81.** Funcţia este definită pe $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; punct de min. $(1,0)$; în $x = 1$, funcţia nu este derivabilă; în punctul de minim, graficul are semitangentă paralelă cu Oy; asimptote $x = -1$, $y = 1$. **82.** Se consideră funcţia definită pe $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; puncte de min. $(0,1)$ şi $(2\pi, 1)$; punct de max. $(\pi, -1)$; asimptote: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. **83.** Se consideră funcţia definită pe $[0, 2\pi] - \{\pi\}$; puncte de max. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2\pi, \frac{1}{2}\right)$; asimptotă: $x = \pi$. **84.** Se consideră funcţia definită pe $[0, 2\pi]$, maximele fiind pentru $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = 2\pi$ iar minimele pentru $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$; dintre punctele de infl. ale graficului este suficient să se ţină seama de acelea date de $x = \frac{3\pi}{4}$ şi $x = \frac{7\pi}{4}$. **85.** Se consideră funcţia definită pe $[0, 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}\right\}$; puncte de max.; $(0,1)$, $(2\pi, 1)$; punct de min. $(\pi, -1)$; asimptote: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. **86.** Se consideră funcţia definită pe $(0, 2\pi) - \{\pi\}$; se observă că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2$; pentru a calcula $\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{\sin 2x}{\sin x}$, se pune $u = x - 2\pi$, deci $\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin (2u + 4\pi)}{\sin (u + 2\pi)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin 2u}{\sin u} = 2$; puncte de infl. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; asimptotă: $x = \pi$. **87.** Asimptotă: $y = 0$. **88.** Funcţia nu este definită în $x = 0$; $f(0 - 0) = 0$, $f(0 + 0) = \infty$; asimptote: $x = 0$, $y = 1$. **89.** Funcţia nu este definită în $x = 0$; $f(0 - 0) = 0$, $f(0 + 0) = \infty$; asimptote: $x = 0$, $y = 1$. **90.** Punînd $u = -x$, rezultă: $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = -\lim\limits_{u\to\infty} ue^{-u} = -\frac{1}{\lim\limits_{u\to\infty} \frac{e^u}{u}} = 0$ (v. cap. VII, § 3); punct de min. $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$; punct de infl. $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$; asimptotă: $y = 0$. **91.** Funcţia este definită pe $(-1, 1)$; punct de infl.: $(0, 0)$; asimptote: $x = -1$, $x = 1$. **92.** Funcţia este definită pe $(0, \infty)$; definind funcţia $u = \frac{1}{x}$ pe $(0, \infty)$, rezultă: $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = -\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ (v. cap. VII, § 3); punct de min. $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$. **93.** Funcţia este definită pe $(0, \infty)$; procedînd ca la exerciţiul anterior, se obţine $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; punct de min. $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$; punct de infl. $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$. **94.** Se obţine $P(x) = x^m (a - x)^n$; funcţia este definită pe $(0, a)$; pentru $x = \frac{ma}{m + n}$ se obţine $P_{max} = m^m n^n \left(\frac{a}{m + n}\right)^{m+n}$.

95. Se obține $S(x) = x^m + \frac{a^n}{x^n}$; funcția este definită pe $(0, a)$; pentru $x = \left(\frac{na^n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, se obține $S_{min} = (m + n) \cdot \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$. **96.** Notînd cu x și cu y dimensiunile dreptunghiului, se obține $x^2 + y^2 = 4r^2$; se stabilește că funcția $S(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ are maximul $2r^2$ pentru $x = y = r\sqrt{2}$; deci dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat este tocmai pătratul înscris în respectivul cerc. **97.** Fie ABC triunghiul dat și un dreptunghi $LMNP$ ales conform condițiilor din enunț (NP pe BC; L între A și B). Notînd $LN = x$, $NP = y$, $BC = a$ și h — înălțimea coborîtă pe BC și ținînd seama de asemănarea triunghiurilor ABC și ALM, se obține $S(x) = \frac{a}{h}\, x(h - x)$; pentru $x = \frac{h}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, se obține $S_{max} = \frac{ah}{4}$. **98.** Notînd cu x diametrul bazei cilindrului și cu y înălțimea cilindrului, se obține $V(x) = \frac{\pi}{4} x^2 \sqrt{4r^2 - x^2}$; pentru $x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ se obține $V_{max} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi^3$. **99.** x și y avînd aceeași semnificație ca la problema anterioară, se obține, pentru $x = 1$ și $y = 2$; $V_{max} = \pi m^3$. **100.** Se exprimă lungimea l a vasului, în poziția în care acesta se sprijină cu o extremitate pe malul rîului, iar cu cealaltă pe peretele canalului, în funcție de unghiul α format de direcția vasului cu malul rîului; se obține $l(\alpha) = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$; pentru $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$, se obține: $L_{max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **101.** Baza cutiei este un pătrat de latură $a = 2x$, iar adîncimea cutiei este x; $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$; pentru $x = \frac{a}{6}$ se obține $V_{max} = \frac{2a^3}{27}$. **102.** Fie MN porțiunea de cale ferată paralelă cu șoseaua; notînd cu x proiecția lui AM pe șosea, traseul este $T(x) = AM + MN + NB = \sqrt{x^2 + 9} + 2 + \sqrt{1 + (8 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 16x + 65} + 2$; pentru $x = 6$ se obține $T_{min} = 2 + 4\sqrt{5} \approx 11$ km. **103.** Notînd cu x distanța de la sursă la pistă și cu d distanța de la sursă la M, se obține $I(x) = \frac{\sin\theta}{d^2} = \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$; pentru $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ se obține $I_{max} = \frac{2}{3R^2\sqrt{3}}$. **104.** Trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$; restrîngînd intervalele, se obține $(-3, 1)$, $(0, 3)$, $(3, 5)$. **105.** Patru rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(3, \infty)$; primul și ultimul interval pot fi ușor restrînse: $(-2, -1)$, $(3, 5)$. **106.** Două rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; restrîngînd: $(-2, -1)$, $(1, 2)$. **107.** Trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}, \infty\right)$; restrîngînd primul și ultimul interval, se obține: $(-1, 0)$, $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}, 2\right)$. **108.** Se obține șirul lui Rolle: $f(-\infty) = -\infty$, $f(-1) = m + 1$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{m-5}{27}$,

$f(\infty) = \infty$; $m < -1$, o rădăcină reală; $-1 \leqslant m \leqslant 5$, toate rădăcinile reale (pentru $m = -1$, $x = 1$ rădăcină dublă; pentru $m = \frac{5}{27}$, $x = \frac{1}{3}$ rădăcină dublă); $m > \frac{5}{27}$, o rădăcină reală. **109.** Şirul lui Rolle: $f(-\infty) = \infty$, $f(-1) = m - 3$, $f(0) = m$, $f(4) = m - 128$, $f(\infty) = \infty$; $m < 0$, două rădăcini reale; $0 \leqslant m \leqslant 3$, toate rădăcinile reale (pentru $m = 0$; $x = 0$ rădăcină dublă; pentru $m = 3$, $x = -1$, rădăcină dublă); $3 < m \leqslant 128$, două rădăcini reale (pentru $m = 128$, $x = 4$ rădăcină dublă); $m > 128$, toate rădăcinile complexe. **110.** Şirul lui Rolle; $f(-\infty) = \infty$, $f(0) = -m^2$, $f(m) = m^2(m^2 - 1)$, $f(2m) = -m^2$, $f(\infty) = \infty$; $|m| < 1$, $m \neq 0$, două rădăcini reale; pentru $m = 0$, $x = 0$, rădăcină cuadruplă; $|m| \geqslant 1$ toate rădăcinile reale (pentru $m = -1$, $x = -1$, rădăcină dublă; pentru $m = 1$, $x = 1$ rădăcină dublă). **111.** Şirul lui Rolle: $f(-\infty) = \infty$, $f(0) = m$, $f(1) = m + 2$, $f(2) = m - 16$, $f(\infty) = \infty$; $m < -2$, două rădăcini reale; $-2 \leqslant m \leqslant 0$, patru rădăcini reale (pentru $m = -2$, $x = 1$ rădăcină dublă; pentru $m = 0$, $x = 0$ rădăcină cuadruplă); $0 < m \leqslant 16$, două rădăcini reale (pentru $m = 16$, $x = 2$ rădăcină dublă); $m > 16$, toate rădăcinile complexe. **112.** Şirul lui Rolle: $f(-\infty) = \infty$, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 6m - \frac{4}{27}$, $f(0) = 6m$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6m - \frac{7}{16}$, $f(\infty) = \infty$; $m < 0$, două rădăcini reale; $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{81}$; toate rădăcinile reale $\left(\text{pentru } m = 0,\ x = 0 \text{ rădăcină dublă; pentru } m = \frac{2}{81},\ x = -\frac{1}{3} \text{ rădăcină dublă}\right)$; $\frac{2}{81} < m \leqslant \frac{7}{96}$ două rădăcini reale $\left(\text{pentru } m = \frac{7}{96},\ x = \frac{1}{2} \text{ rădăcină dublă}\right)$; $m > \frac{7}{96}$, toate rădăcinile complexe. **113.** $f(-\infty) = -\infty$ şi $f(\infty) = \infty$, deci, oricare ar fi p şi q, (reali), ecuaţia are cel puţin o rădăcină reală; pentru $p < 0$ se obţine şirul lui Rolle: $f(-\infty) = -\infty$, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(-2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + 3q\right)$, $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + 3q\right)$, $f(\infty) = \infty$; după cum $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ sau > 0, ecuaţia are toate rădăcinile reale sau o singură rădăcină reală. **114.** Şirul lui Rolle: $f(-\infty) = \infty$, $f\left(-\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right) = q - \frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} = 3\left(\frac{q}{3} - \frac{p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)$, $f(\infty) = \infty$; după cum $\left(\frac{q}{3}\right)^3 - \left(\frac{p}{4}\right)^4 < 0$ sau > 0, ecuaţia are două rădăcini reale sau toate rădăcinile complexe. **115.** Tratînd ca la exerciţiul 113, se observă că ecuaţia are totdeauna cel puţin o rădăcină reală şi cel mult trei asemenea rădăcini, şi anume — în acest ultim caz — în mod necesar: $p < 0$ şi $\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q}{2n}\right)^{2n} < 0$. **116.** Funcţia $f(x) = x^2 - x - \ln x + m$ este definită pe $(0, \infty)$. Se calculează mai întîi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(\infty)$; evident: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$; pe de altă parte: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{m}{x^2}\right)$ şi, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (v. cap. VII, § 3), rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; derivata are rădăcina $x = 1$; se obţine şirul lui Rolle: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f(1) = m$, $f(\infty) = \infty$; $m \leqslant 0$, două rădăcini reale (pentru $m = 0$, $x = 1$ rădăcină dublă); $m > 0$, nici o rădăcină reală. **117.** Funcţia $f(x) =$

$= x^2 + x + e^{-x} + m$ este definită pe R. Se calculează mai întîi $f(-\infty)$ și $f(\infty)$; evident: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; de asemenea $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^2} = \infty$ (v. cap. VII, § 3); se obține șirul lui Rolle: $f(-\infty) = \infty$, $f(0) = m + 1$, $f(\infty) = \infty$; $m \leqslant 1$, două rădăcini reale (pentru $m = -1$, $x = 0$ rădăcină dublă); $m > 1$, nici o rădăcină (reală). **118.** 1,32. **119.** 2,888. **120.** 1,636. **121.** — 0,31; 0,44; 1,06.

Capitolul XI (Integrale)

1. $\frac{5}{6}$, **2.** Pentru a calcula $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ se pleacă de la $(p+1)^4$ etc. (analog procedeului indicat în subsolul de la § 1); se obține 4. **4.—6.** Se vor lua punctele intermediare la mijlocul intervalelor parțiale și se va arăta că sumele integrale corespunzătoare sînt nule. La **7.** Alegînd punctele intermediare ca la exercițiile anterioare, se va arăta că sumele integrale corespunzătoare ale funcției $\cos x$ pe intervalul $q - a, 0]$ sînt respectiv egale cu sumele integrale corespunzătoare ale funcției $\cos x$ pe intervalul $[0, a]$. **8.—13.** În fiecare caz se determină ușor o funcție F a cărei derivată să fie funcția f de sub semnul integrală; de exemplu la **8.** $F(x) = x^3 + x^2$. Se obține. **8.** 2. **9.** 1. **10.** $\frac{1-e}{e}$; **11.** $1 - \sqrt{3}$; **12.** -1; **13.** $-\frac{\pi}{4}$. **18.** $2x^4 - x^2 + 3x + C$. **19.** $\frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$. **20.** $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 5x + C$. **21.** $\frac{-2x^2 + 4x^3 - 1}{4x^4} + C$. **22.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + x + C$. **23.** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - x^2 + 3x + C$. **24.** $\frac{8x\sqrt[8]{x^7}}{15} + C$. **25.** $\frac{3\sqrt[3]{x^2} - x^{-2}}{2} + C$. **26.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$. **27.** $\frac{10}{3}x\sqrt{x} - \frac{15}{8}x\sqrt[5]{x^3} - 4\sqrt{x} + C$. **28.** $\frac{(2x-1)^8}{16} + C$. **29.** $\frac{(3+4x)^6}{24} + C$. **30.** $\frac{(7-3x)^{10}}{7^9.30}$. **31.** $\sqrt{x+1} + C$. **32.** $-\frac{3}{4}\sqrt{5-4x} + C$. **33.** $4\sqrt{x^2 + x + 1} + C$. **34.** $\frac{1}{5}$ In $C\,|x|$. **35.** $-\ln C\,|2 - x|$. **36.** $\frac{2}{3} \ln C\,|3x + 5|$. **37.** $\frac{1}{2}\ln C\,(x^2 + 2x + 5)$. **38.** $\frac{5}{3} \ln C\,|x^3 - 1|$. **39.** $2\sqrt{2} \arcsin(x\sqrt{2}) + C$. **40.** $\frac{2}{3}\arcsin(3x - 1) + C$. **41.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C$. **42.** $\frac{1}{2}\arcsin(x^2 - 2x + 3) + C$. **43.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 4x + C$. **44**. $\frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{7}) + C$. **45.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$. **46.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2 - 3) + C$. **47.** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$. **48.** $7\cos\left(2 - \frac{1}{7}x\right) + C$. **49.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2 - 2x - 3) + C$. **50.** $\frac{7}{3}\sin(x^3 + 1) + C$. **51.** $\sin^2 x \cos x = \sin^2 x (\sin x)'$; integrala nedefinită este $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **52.** $\cos^5 x \sin x = -\cos^5 x (\cos x)'$; integrala nedefinită este $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$. **53.** $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = \cos^2 x (\sin x)' = (1 - \sin^2 x)(\sin x)' = (\sin x)' - \sin^2 x (\sin x')$; integrala nedefinită este

$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **54.** $\cos^2 x \sin^3 x = \cos^2 x \sin^2 x \sin x$ etc. integrala nedefinită este $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$. **55.** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$. (Se observă că procedînd ca la exerc. **51** — **55**. pot fi determinate rapid integralele nedefinite ale puterilor impare ale lui $\sin x$ şi $\cos x$, ca şi integralele nedefinite ale produselor de forma $\sin^m x \cos^n x$, unde cel puţin unul dintre numerele naturale m şi n este impar.) **56.** $\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x + C$. **57.** $-\frac{5}{2}\operatorname{ctg}(x^2 + 2x) + C$. **58.** $3e^{\frac{x}{3}} + C$. **59.** $-e^{-x+4} + C$. **60.** $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$. **61.** $\frac{a^{3x}}{\ln a^3} + C$. **62.** $\frac{a^{x^2+2x-5}}{\ln a^2} + C$. **63.** $\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{23}{12}$. **64.** $\frac{3}{2}\ln\frac{|x^2 - 2x|}{3}$. **65.** $\frac{1}{2}\left[\sin\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right) + 7\right]$. **66.** Se ţine seama de faptul că $x^6 = (x^3)^2$; primitiva căutată este $\frac{1}{3}\left(5 \operatorname{arctg} x^3 + \frac{7\pi}{4}\right)$. **67.** $\frac{25}{6}$. **68.** $\frac{7}{64}$. **69.** $-\frac{26}{33}$. **70.** $\frac{3}{2}(3\sqrt[3]{3} - 1) + 3e(e^2 - 1) + \frac{8}{3} - \ln 3^5$. **71.** $\frac{\ln 2}{3}$. **72.** Se observă că $\frac{\ln x}{x} = \ln x(\ln x)'$; integrala definită este $\frac{1}{2}$. **73.** $\frac{1}{3}$. **74.** $\frac{2}{3}$. **75.** $\frac{1}{3}(e^2 - 1)$. **76.** Se observă că $\frac{1}{9 + 2x^2} = \frac{\frac{1}{9}}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{3}\right)^2}$ etc.; se obţine $\frac{\pi}{12\sqrt{2}}$. **77.** Se tratează ca exerciţiul anterior; se obţine $\frac{\pi}{4ab}$. **78.** Se observă că $\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} = \frac{(\sin t)'}{1 + \sin^2 t}$; se obţine $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **79.** Integrala se scrie $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1 - x^2)\,dx + \int_{0}^{5}(x^2 - 1)\,dx$; se obţine $\frac{891}{24}$. **80.** Analog exerc. **79.**; se obţine 3. **81.**—**83.** Se descompune intervalul de integrare în intervale parţiale, corespunzătoare modului în care este definită f; se obţine: **81.** $\frac{5e - 1}{e}$. **82.** $\frac{-\ln 3^4 + 16 - 1}{4}$. **83.** $\frac{2 + \pi}{2}$. **84.** Se pune $x = u$, $\frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx = dv$; se obţine $\frac{\pi - 2}{4}$. **85.** Se pune $\arcsin 2x = u$, $dx = dv$; se obţine $\frac{\pi + 6\sqrt{3} - 12}{24}$. **86.** Se pune, de exemplu, $x = u$, $\cos x\,dx = dv$; se obţine $\frac{\pi - 2}{2}$. **87.** Se pune $\ln t = u$, $(t - 3)\,dt = dv$; se obţine $\frac{11 - e^2}{4}$. **88.** Se pune $\operatorname{arctg} x = u$, $dx = dv$ şi se obţine un rezultat care necesită determinarea unei primitive a funcţiei $\frac{x^2}{1 + x^2}$, ceea ce este simplu dacă se scrie: $\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$; integrala definită este $\frac{2 - \pi}{4}$. **89.** $\frac{2\ln 2 + \pi - 4}{2}$. **90.** Se integrează de două ori prin părţi, luînd succesiv: $x^2 = u$, apoi $x = u$; se obţine $\frac{5 - e^2}{e}$.

91. Se integrează de două ori prin părți, luînd, de exemplu, de fiecare dată $e^{-2\alpha} = u$; se obține $\frac{2}{13}(e^{-2\pi}+1)$. **92.** Se integrează de două ori părți, luînd întîi $(\ln t)^2 = u$ iar apoi $\ln t = u$; se obține $\frac{8}{3}\ln^2 2 - \frac{16}{9}\ln 2 + \frac{14}{27}$. **93.** Se scrie $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ și se face substituția $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$; se obține $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **94.** Se pune $a^x = t$; se obține $\frac{\cos 1 - \cos a}{\ln a}$. **95.** Se pune $\sin x = t$; se obține $\frac{e^2-1}{e}$. **96.** Se pune $\cos x = t$; se obține $\frac{\pi-2}{2}$. **97.** Se pune $\operatorname{tg} x = t$; se obține $-\frac{1}{3}$. **98.** Se pune $\operatorname{tg} x = t$ și apoi se scrie: $\frac{1}{t^2-4t+5} = \frac{1}{(t-2)^2+1}$; se obține $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$. **99.** Pentru a înlătura radicalul se pune $1+x^2 = t^2$; se obține $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **100.** Se pune $3x-1 = t^2$; se obține $\frac{2(4\sqrt{2}-\sqrt{5})}{9\sqrt{10}}$. **101.** Se pune $x+1 = t^6$; se obține $6\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)$. **102.** Se pune $x = a\sin t$; apoi se observă că

$$\frac{\cos t}{\sin t+\cos t} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left[\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

etc.; se obține $6\,\frac{\pi}{4}$. **103.** Suprafața este simetrică față de axa Ox; este suficient să se calculeze aria corespunzătoare lui $y = \sqrt{2x}$; se obține aria totală $\frac{16}{3}$. **104.** $\frac{1}{3}$. **105.** Suprafața este simetrică față de origine; este suficient să se calculeze aria suprafeței din primul cadran; aria totală: $\frac{1}{2}$. **106.** $4\ln 2$. **107.** Este suficient să se calculeze aria porțiunii din primul cadran; la integrare se face substituția $x = a\sin t$ și apoi se ține seama de identitatea $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$; aria totală: πab. **108.** $\frac{4(\sqrt{3}+4\pi)}{3}$. **109.** $e-1$. **110.** $a-b+\ln\frac{b^b}{a^a}$. **111.** Se face substituția $x = \sin t$; se obține $\frac{1}{3}$. **112.** $\frac{64\pi}{405}$ **113.** $\frac{2\pi}{35}$. **114.** Se ține seama de identitatea $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. se obține $\frac{\pi^2}{4}$. **115.** Se face substituția $\operatorname{tg} x = t$; se obține $\frac{\pi(4-\pi)}{4}$. **116.** Se scrie $\frac{x^3}{1-x} = \frac{x^3-1+1}{1-x} = -\left[\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right]$ etc., se obține $\frac{\pi(\ln 8-2)}{3}$. **117.** Se integrează prin părți; se obține $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **118.** Din motive de simetrie rezultă direct $x_G = \frac{\pi}{2}$;

este recomandabil ca acest rezultat să fie verificat, calculînd $x_G = \frac{\int_0^\pi x \sin x \, dx}{\int_0^\pi \sin x \, dx}$ (integrala de la numărător se efectuează prin părţi); se obţine apoi $y_G = \frac{\pi}{8}$. **119.** Pentru calcularea numitorului lui x_G şi y_G se observă că, notînd cu P punctul $(0, b)$ şi cu Q punctul $(a, 0)$, aria suprafeţei considerate este: $\frac{1}{4}$ aria elipsei — aria ΔOPQ (se ţine seama apoi de exerc. 107); se obţine $x_G = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$, $y_G = \frac{2b}{3(\pi - 2)}$. **120.** Tratarea acestui exerciţiu este, în multe privinţe, analogă celei a exerciţiului anterior; se obţine $x_G = \frac{4a}{3\pi}$ $y_G = \frac{4(a+b)}{3\pi}$. **121.** Se calculează $\int_{r'}^{r''} F \, dr$; se obţine $L = ke_1e_2\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$. **122.** Se pune $F(x) = kx$, unde x reprezintă deplasarea resortului faţă de poziţia iniţială, se determină k din condiţiile problemei, se obţine $L = 11{,}25$ kgm. **123.** Se ţine seama de relaţia $F = pS$; se obţine $L = k \ln \frac{b}{a}$. **124.** Notînd cu c coeficientul de proporţionalitate şi cu v viteza corpului, se obţine $L = c\int_0^a v^2 \, ds$, ds se obţine din datele problemei; se găseşte $L = \frac{27}{7} c \sqrt[3]{k^2a^7}$. **125.** Lucrul mecanic (total) se obţine însumînd lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea ascensorului ($F_1 = \text{const.} = 2\,000$ kgf) cu lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea cablului; notînd cu x distanţa la un moment dat dintre ascensor şi fundul puţului, rezultă $F_2(x) = 2(400 - x)$ kgf; se obţine $L = 960\,000$ kgm.

Exerciţii suplimentare

1. Dacă $|\alpha| < 1$, atunci $a^n \to 0$, deci $a_n \to \frac{1}{1-\alpha}$; dacă $\alpha > 1$ şi $\beta > 0$, atunci $a^n \to \infty$, $\alpha^n\beta \to \infty$ şi $a_n \to \infty$, dacă $\alpha > 1$ şi $\beta = 0$, rezultă $\alpha^n\beta = 0$ pentru orice n, deci $a^n\beta \to 0$, iar $a_n \to \infty$; dacă $\alpha \leqslant -1$, scriind $a_n = \left(\beta + \frac{1}{\alpha - 1}\right)\alpha^n + \frac{1}{1-\alpha}$, se observă că şirul are limită, şi anume $\frac{1}{1-\alpha}$ dacă, şi numai dacă, $\beta + \frac{1}{\alpha-1} = 0$, adică $\alpha = \frac{\beta - 1}{\beta}$ se cercetează dacă $\alpha \leqslant -1$ e compatibil cu $\beta \geqslant 0$; se obţine $0 < \beta \leqslant \frac{1}{2}$.

2. *a*) De exemplu, pentru $x_0 \in [-1, 0)$ rezultă $f(x_0) = -1$; pentru $x_0 \in [0, 1)$ rezultă $f(x_0) = 0$; pentru $x_0 \in [1, 2)$ rezultă $f(x_0) = 1$ etc.; graficul este „în trepte" (porţiuni din

paralelele la Ox prin punctele de ordonată întreagă); funcţiile de acest fel se numesc *funcţii în scară* sau *funcţii etajate*; *b*) dacă $x_0 \in [0, 1)$ rezultă $f(x_0) = x_0$, dacă $x_0 \in [1, 2)$, rezultă $f(x_0) = x_0 - 1$ etc.; graficul este constituit din porţiuni din paralelele la prima bisectoare prin punctele de abscisă întreagă; *c*) dacă $\sqrt{x_0} \in [0, 1)$, deci $x_0 \in [0, 1)$, rezultă $f(x_0) = 0$; dacă $\sqrt{x_0} \in [1, 2)$, deci $x_0 \in [1, 4)$, rezultă $f(x_0) = 1$; dacă $\sqrt{x_0} \in [2, 3)$, deci $x_0 \in [4, 9)$, rezultă $f(x_0) = 2$ etc.; *d*) dacă $x_0^2 \in [0, 1)$, deci $x_0 \in [0, 1)$, rezultă $f(x_0) = 0$; dacă $x_0^2 \in [1, 2)$, deci $x_0 \in [1, \sqrt{2})$, rezultă $f(x_0) = 1$ etc.

3. Se observă uşor că, dacă $\alpha > 1$, atunci $l_d = \infty$ şi $l_s = -\infty$, iar dacă $\alpha < -1$, atunci $l_d = -\infty$ şi $l_s = \infty$; dacă $|\alpha| \leqslant 1$, funcţia nu are limite laterale în $x = 0$; într-adevăr, în acest caz, există şiruri $x_n \to 0$, $x_n > 0$ pentru orice n, astfel încît $\alpha + \sin \dfrac{1}{x_n} = 0$ pentru orice n, deci $f(x_n) = 0$ pentru orice n; dar există şi şiruri $y_n \to 0$, $y_n > 0$ pentru orice n, astfel încît $\alpha + \sin \dfrac{1}{y_n} > 0$ pentru orice n, deci $f(y_n) \to \infty$; în concluzie, funcţia considerată nu are limită la dreapta în $x = 0$; analog se demonstrează că nu există limită la stînga în acest punct.

4. $f_1(a) = \dfrac{3 + \sqrt{9 + 3a}}{a}$, $f_2(a) = \dfrac{3 - \sqrt{9 + 3a}}{a}$; amplificînd cu conjugata numărătorului rezultă respectiv: $\lim\limits_{a \to 0} f_2(a) = -\dfrac{1}{2}$ şi $f_1(0 + 0) = \infty$, $f_1(0 - 0) = -\infty$. (Se observă că $-\dfrac{1}{2}$ este rădăcina ecuaţiei de gradul I, care se obţine pentru $a = 0$ din ecuaţia dată; desigur nu are sens să se considere ∞ sau $-\infty$ ca „rădăcini" ale acestei ecuaţii.)

5. 1° Notînd $y_0 = f(x_0)$, $z_0 = g(x_0)$, $(x_0 \in R)$, se observă uşor că f şi g pot fi definite pe R; rezultă, oricare ar fi $y_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 \in (-\pi, \pi)$: $\operatorname{tg} y_0 = \dfrac{x_0^2 - 2ax_0 - a^2}{x_0^2 + 2ax_0 - a^2}$ şi $\operatorname{tg} \dfrac{z_0}{2} = \dfrac{x_0}{a}$. Înlocuind $x_0 = a \operatorname{tg} \dfrac{z_0}{2}$ în prima egalitate, se obţine, după transformări simple, $\operatorname{tg} y_0 = \dfrac{\cos z_0 + \sin z_0}{\cos z_0 - \sin z_0} = \dfrac{1 + \operatorname{tg} z_0}{1 - \operatorname{tg} z_0} = \operatorname{tg}\left(z_0 + \dfrac{\pi}{4}\right)$; rezultă $y_0 = z_0 \dfrac{\pi}{4} + k_0\pi$ (k_0 întreg, depinzînd de y_0 şi z_0, deci de x_0); sau $f(x_0) = g(x_0) + \dfrac{\pi}{4} + k(x_0)\pi$; pentru x oarecare avem; $f(x) = g(x) + \dfrac{\pi}{4} + k(x)\pi$; funcţia $k(x)$ are *numai valori întregi* şi este *continuă* $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continue; rezultă $k(x) \equiv c$ (c un anumit număr întreg, deoarece, dacă am avea $k(x_1) = k_1$ şi $k(x_2) = k_2$, $k_1 < k_2$, atunci luînd $k_1 < r < k_2$, r neîntreg, funcţia $k(x) - r$ este continuă şi ia valori de semne contrare în x_1 şi x_2, deci se anulează într-un punct $x_1 < \alpha < x_2$, $k(\alpha) - r = 0$, adică $k(\alpha) = r$, ceea ce este exclus, deoarece $k(x)$ ia numai valori întregi. 2° Pentru $x = a$ se obţine $c = -1$.

7. 2° $a = 4$, $b = -5$; 3° $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -7$, min. şi $f(2) = 3$, max.; $y = 1$ asimptotă.

8. Dreptunghiul fiind $ABCD$ (A şi D pe parabolă), se notează $x = h - AB$; se observă că $AD = 2y$, unde y verifică ecuaţia $y = \sqrt{2px}$; se obţine $S(x) = 2(h - x)\sqrt{2px}$; pentru $x = \dfrac{h}{3}$ se obţine $S_{max} = \dfrac{4h\sqrt{2ph}}{3\sqrt{3}}$.

9. Evident $nm = 60$; se ştie că forţa electromotoare a bateriei de n elemente legate în serie este rezistenţa interioară nr; grupînd apoi cele m baterii în paralel, forţa electromotoare este ne, rezistenţa interioară $\frac{nr}{m}$; aplicînd legea lui Ohm, se obţine $I = \frac{ne}{R + \frac{nr}{m}} = \frac{60\,e}{mR + nr}$; înlocuind $m = \frac{60}{n}$, rezultă $I = \frac{60\,ne}{60R + n^2 r}$. Pentru a rezolva mai rapid problema trebuie să se recurgă la derivate; observînd, însă, că funcţia $I(n)$ nu este definită decît pentru numere întregi, se consideră funcţia $f(x) = \frac{60\,ex}{60\,R + rx^2}$ definită, de exemplu, pe $[0, +\infty)$ (evident $1 \leqslant n \leqslant 60$); pe mulţimea numerelor întregi din intervalul $[1, 60]$, funcţia f coincide cu $I(n)$; funcţia f are un maxim pentru $x_0 = 2\sqrt{\frac{15\,R}{r}}$; dacă $x_0 \geqslant 60$, atunci, deoarece $f(x)$ este crescătoare pe $[1, 60]$, maximul lui $I(x)$ este dat de $n = 60$; deci $m = 1$ (toate elementele se leagă în serie); dacă $x_0 < 60$ şi dacă x_0 este întreg şi divizor al lui 60, atunci $n = x_0$; dacă x_0 este întreg, dar nu este divizor al lui 60, sau dacă x_0 nu este întreg, se consideră cel mai mare divizor n_1 al lui 60, astfel ca $n_1 < x_0$, şi cel mai mic divizor n_2 al lui 60, astfel ca $n_2 > x_0$; dacă $I(n_1) > I(n_2)$, atunci $n = n_1$; dacă $I(n_1) < I(n_2)$, atunci $n = n_2$; dacă $I(n_1) = I(n_2)$, se poate lua oricare din numerele n_1 şi n_2 (se obţine aceeaşi intensitate formînd baterii fie de cîte n_1 elemente, fie de cîte n_2 elemente); 1° $x_0 > 60$, deci $n = 60$; 2° $x_0 = 30$, deci $n = 30$; 3° $x_0 \approx 12{,}2$; se cercetează $I(12)$ şi $I(15)$; se obţine $I(12) = 2{,}45\,e$ şi $I(15) = 2{,}4\,e$, deci se ia $n = 12$.

10. Notînd cu B' proiecţia lui B pe calea ferată, cu M punctul de racordare şi $B'M = x$, costul transportului este $\gamma(x) = \alpha(30 - x) + \beta\sqrt{x^2 + 81}$, $x \in [0, 30]$ (B' corespunde lui $x = 0$, iar A lui $x = 30$). Anulînd derivata, se obţine $x_0 = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$; dacă $x_0 \geqslant 30$, atunci deoarece $\gamma(x)$ este descrescătoare pe orice interval $[0, r]$, $r < x_0$, minimul lui $\gamma(x)$ pe $[0, 30]$ este atins în A; dacă $x_0 < 30$, punctul de racordare este M dat de $B'M = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$; se observă că, dacă $x_0 = 0$, adică $\alpha = 0$, punctul de racordare este în B' — ceea ce se interpretează uşor din datele problemei.

11. Pentru $0 < b < \frac{1}{4}$, $\mu(H)$ are două extreme (un maxim şi un minim); pentru $b \geqslant \frac{1}{4}$ nu există extreme (μ este strict crescătoare).

12. Notînd cu h înălţimea unui con drept înscris în sfera dată se obţine $S(h) = \pi h\sqrt{2R(2R - h)}$ şi $V(h) = \frac{1}{3}h^2\sqrt{2R - h}$; pentru $h = \frac{4R}{3}$ se obţine $S_{max} = \frac{8\pi R^2}{3\sqrt{3}}$; pentru $h = \frac{4R}{3}$ se obţine $V_{max} = \frac{32}{81}\pi R^2$.

13. 1° $a = -5$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 1$; 2° asimptote: $y = 1$, $x = 2 - \sqrt{3}$, $x = 2 + \sqrt{3}$.

14. *a)* $f(2) = e^4$, max.; $f(4) = e^8$, min.; asimptote: $y = 0$, $x = 3$; *b)* se studiază pe $[0, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$; $f(0) = 0$, min.; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 2$, max.; $f(2\pi) = 0$, max.; $x = \frac{3\pi}{2}$, asimptotă.

15. Notînd $b - a = l$ și luînd punctele intermediare la extremitățile stîngi ale intervalelor parțiale, se obține: $S_n = \frac{l}{n}\left(e^{ar} + e^{r\left(a+\frac{l}{n}\right)} + \ldots + e^{r\left[a+(n-1)\frac{l}{n}\right]}\right) =$

$= \frac{l}{n} \cdot \frac{e^{r(a+l)} - e^{ar}}{e^{\frac{rl}{n}} - 1} = l(e^{rb} - e^{ra}) \cdot \frac{1}{n\left(e^{\frac{rl}{n}} - 1\right)}$; notînd $\frac{rl}{n} = t_n$, rezultă $t_n \to 0$, iar numitorul precedent se scrie: $rl\,\frac{e^{t_n} - 1}{t_n} = rl\,\frac{e^{t_n} - e^0}{t_n - 0}$; se știe că $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t - 0} = (e^t)'_{t=0} =$ $= e^0 = 1$; deci, deoarece $t_n \to 0$ avem $rl\,\frac{e^{t_n} - e^0}{t_n - 0} \to rle^0 = rl$; rezultă $S_n \to l(e^{rb} - e^{ra}) \cdot \frac{1}{rl} =$ $= \frac{e^{rb} - e^{ra}}{r}$; deci $\int\limits_a^b e^{rx}\,dx = \frac{e^{rb} - e^{ra}}{r}$.

17. 1° $d = 0$, $a = 2c$, $b = c$; funcția căutată este $f(x) = \frac{2x+1}{x}$; 2° aria este $1 + \ln 3$, iar volumul $\frac{2\pi(13 + 6\ln 3)}{3}$.

18. Perioadele funcțiilor $\sin \omega_1 t$, $\cos \omega_2 t$ sînt respectiv: $\frac{2\pi}{\omega_1}$, $\frac{2\pi}{\omega_2}$; rezultă $T =$ $= m\,\frac{2\pi}{\omega_1} = n\,\frac{2\pi}{\omega_2}$ (m, n — numere naturale); se obține $I_e = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

19. Știind că $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se obține $E = \frac{1}{2}Ra^2T$; rezultă că într-o secundă consumul mediu de energie este $\frac{1}{2}Ra^2$.

20. Notînd cu M masa pămîntului și cu x distanța dintre centrul pămîntului și corpul considerat, rezultă — conform legii atracției universale — $F(x) = k\,\frac{mM}{x^2}$; la suprafața pămîntului (deci pentru $x = R$) se obține $k\,\frac{mM}{R^2} = mg$, deci $g = k\,\frac{M}{R^2}$; se calculează apoi $L = \int\limits_R^{R+h} F(x)\,dx$ și se înlocuiește în rezultat $k\,\frac{M}{R^2} = g$; se obține $L =$ $= gm\,\frac{Rh}{R+h}$; $\lim\limits_{h\to\infty} L(h) = gmR$.

CUPRINSUL

Redactor responsabil : VOICU I. VOICU
Tehnoredactor : GRUIA IANCU

Dat la cules 04.06.1965. Bun de tipar 20.09.1965. Apărut 1965. Tiraj 82000+100 broșate. Hîrtie scris tip II A 63 g/m², 16170×100. Coli editoriale 20,050. Coli de tipar 21,5, plan 14069. A 6304. C. Z. pentru bibliotecile mari 517(075.3). C. Z. pentru bibliotecile mici 51.

Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918".
Str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, București,
Republica Socialistă România
Comanda nr. 968